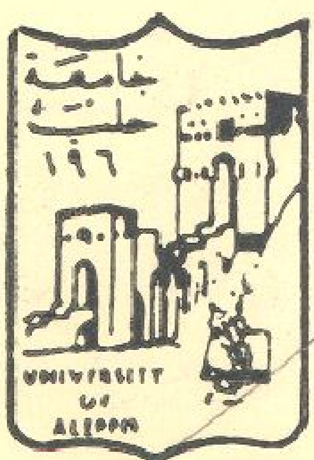
مصادر ودراسات في تاريخ الرياضيات العربية ٣



رسائل الخيام الجبرية

حققها وترجمها وقدم لها

رشدي راشد

احمد جبار

جامعة حلب

معهد التراث العلمي العربي

١٩٨١

رسائل الخيام الجبرية

مصادر ودراسات في تاريخ الرياضيات العربية ٣

رسائل الخيام الجبرية

حققها وترجمها وقدم لها

رشدي راشد

احمد جبار

جامعة حلب

معهد التراث العلمي العربي

١٩٨١

فاتحة

لقد كنت أعتقد – وما زلت – أن مؤلفات عمر الخيام الرياضية هي من أهم آثار ما كتب بالعربية من رياضيات ، ومن أبعدها صوتا في تاريخ الفكر الإنساني ، ومن ثـم فهي من أجدر ما تحتويه كنوز السلف بالعناية والاهتمام . ورأيت أن خير مشاركة نقدمها في هذا السبيل هي نشر مصنفات الخيام الجبرية . ولهذا دأبت وحرصت منذ سنوات عديدة على البحث عن مخطوطات الخيام الجبرية في مكتبات العالم وإحصائها ، حتى استطيع نشرها محققة ، ورأيت – كيما تعم الفائدة – نقلها إلى إحدى اللغات الأوربية والتقديم لها بما يلزمها من تحليل ودراسة ، فأحيي بهذا آثار أول من صاغ نظرية هندسية للمعادلات الجبرية وأسهم بصورة ما في إبداع الهندسة التحليلية بالمعنى الذي سنجد منه شيئاً في كتاب ديكارت الملقب بالهندسة .

وقد ألحت عليّ فكرة تحقيق رسائل الخيام عندما كشفت لأول مرة عن أعمال شرف الدين الطوسي وأهميتها البالغة لكتابة تاريخ الهندسة التحليلية أو على الأصح الهندسة الجبرية . فعند تحقيقي لكتاب شرف الدين الطوسي كنت كثيراً ما أرجع إلى مصنفات الخيام لتبصّر أثره ولتحديد ما قام به الطوسي نفسه من جديد . وكثيراً ما شعرت طوال هذا العمل بحاجة ماسة لطبعة جديدة محققة لآثار الخيام تغني عن تكرار مؤلفاته كذيول لكتاب الطوسي . ولكن كشفي هذا سمح بما لم يكن ممكناً من قبل ، أعني برؤية تاريخية للخيام ولهذا الفرع من الجبر . فقبل هذا لم نكن نعرف إلا الخيام نفسه ، وكنا نجهل من تبعه ودرس ابتكاراته ومن ثـم لم نكن ندري شيئاً عن أثره في تاريخ العلوم الجبرية .

ومما زاد فكرة إخراج مصنفات الخيام إلحاحاً العثور على نص « في قسمة ربع الدائرة » لم ينشر محققاً بعدُ رغم أهميته لفهم ما قصد إليه الخيام ، ولوعْي مشروعه العلمي . أضف إلى ذلك كله ما نعلمه اليوم عن مخطوطات لرسالته في الجبر لم تكن معروفة في منتصف القرن الماضي عندما قام المستشرق الفاضل ڤبكه بتحقيقها وترجمتها إلى الفرنسية ودراستها .

لهذا كله : وعندما أسس أخيراً معهد التراث العلمي العربي ، وأراد المشرفون عليه إخراج النصوص العلمية الهامة حادثت صديقي أحمد جبّار بهذا العمل فقبل بمشاركتي فيه ، مما أسرع بتقديمه إلى القرّاء على نحو نرجوه مرضيا للبحث والباحثين .

ولا أنسى أن أقر بفضل الأستاذ الصديق محمود فاخوري الذي قبل مشكوراً مراجعة تحقيق النصوص العربية لغوياً . كما أرجو أن تتقبل هيئة معهد التراث العلمي العربي وخاصة السيد مصطفى موالدي خالص شكري لمراجعته خطوات طبع هذا الكتاب ، والسيد مالك الملوحي لتدقيقه تجارب طباعة النص العربي ، وأخيراً وليس آخراً أشكر هيئة مطبعة جامعة حلب وخاصة السيدة صونيا جانجي والسيد محمود مقدم .

رشدي راشد

مقدمة

حياة الخيـــــام

في أواسط القرن الخامس الهجري الموافق أيضاً لأواسط القرن الحادي عشر الميلادي ولد بنيسابور لإبراهيم الخيامي أبو الفتح عمر . فمن نسبته إذاً يبدو أن أباه أو أحد أجداده كان بائعاً للخيم . ولكن أبا الفتح عمر كثيراً ما كان يسمي نفسه بالخيام لا بالخيامي فلنتبعه في ذلك : فمؤلفنا هو إذاً أبو الفتح عمر بن إبراهيم الخيام الرياضي الشاعر . ورغم شهرة الخيام الفائقة ، ورغم الاهتمام بأدبه وعلمه ، فإننا لا نعرف عن حياته الكثير ، فالمؤلفون المحدثون يتبعون المؤلفين القدماء في ترددهم حول حياته ، بل حول تاريخ ميلاده ووفاته وأماكن إقامته ورحلاته . وكذلك لا ندري على وجه اليقين من هم شيوخه في ميادين العلم والأدب — فإذا رجعنا إلى كتب التاريخ والفهارس المشهورة لنطالع ما بها عن الخيام وحياته فلن نجد إلا القليل النزر ، سنجد خاصة قصصا يغمرها الخيال الذي أثاره إبداع الخيام نفسه في الرياضيات والشعر ، وسنقرأ غالب ما نقرأ روايات تستعير بعضها من بعض وتكرر بعضها الآخر دون أن ينظر إلى إسنادها بعين ممحصة ثاقبة . فالبعض يحدث بورعه وتقواه ، والبعض يستنكر مجونه واستخفافه بأمور الدين ، ولكن الجميع يشهد له بالنبوغ في العلم ويقر له بالإمامة فيه ، وكذلك في الشعر والأدب .

ولا يعنينا هنا نقل كل ما روي عن الخيام وجمعه فلقد تم هذا من قبل دون تمحيص وتحقيق(١) لمعرفة ما يزيد بعضهم وما ينقص بعض ، ولكن سنذكر طرفا عن مولده ووفاته .

لعل أهم وأقدم ما روي عن مولد الخيام وحياته هو ما رواه ظهير الدين أبو الحسن

---

(١) انظر على سبيل المثال :

احمد حامد الصراف : عمر الخيام الحكيم الرياضي الفلكي النيسابوري مطبعة المعارف ، بغداد ١٩٦١م.

H. Suter: *Die Mathematiker und Astronomen der Araber und ihre werke*, Leipzig 1900, p.113

وكذلك أغلب من تعرض لحياة الخيام

البيهقي والعروضي السمرقندي . فكلٌ منهما قد عاصر الخيام ورآه . فلننظر أولاً إلى ما وقع إلينا من كلامهم عن الخيام .

يذكر ظهير الدين البيهقي(١) في ترجمته « للدستور الفيلسوف حجة الحق عمر بن إبراهيم الخيام » ما نصه « كان نيسابوري الميلاد والآباء والأجداد ، وكان تلو أبي علي < ابن سينا >(٢) في أجزاء علوم الحكمة ، إلا أنه كان سيء الخلق ضيق العطن . وقد تأمل كتابا بأصفهان سبع مرات وحفظه ، وعاد إلى نيسابور وأملاه ، فقوبل بنسخة في الأصل فلم يوجد بينهما كثير تفاوت . وطالعه الجوزاء والشمس وعطارد على درجة الطالع في ح من الجوزاء وعطارد صميمي والمشتري من التثليث ناظر إليهما . وله ضنة بالتصنيف والتعليم ، ولم يصنف إلا مختصراً في الطبيعيات ورسالة في الوجود ورسالة في الكون والتكليف ، وكان عالما باللغة والفقه والتواريخ » .

وقول البيهقي هذا لا يتضمن أي تحامل على أبي الفتح ولا إطراءً مخلاً ، مما يحث على التوقف عن إسقاطه . فإن كان لا ينسى محامده ، فهو يذكره بالسوء أيضا . وقد يشك البعض في معرفة البيهقي بالخيام : أليس عجيبا أنه لا يذكر من مؤلفاته إلا ما سبق ؟ وتفسير هذا ، هو أن اهتمامات البيهقي نفسه كانت في العلوم الدينية والأدبية والفلسفية فليس من أسلوبه في كتابه هذا تعداد مصنفات كلٍّ من ترجم لهم ، بل يذكّر فقط بميدان نشاطهم . وهكذا يقول عن الخيام « وأما أجزاء الحكمة من الرياضيات والمعقولات فكان ابن بجدتها » (٣) . ومما يجب أن ننتبه إليه في نص البيهقي هو ذكره لطالع الخيام ، فنحن لا نعرف كيف وقع له هذا الطالع . ولكن ذكره إياه مع تفاوت السن بينه وبين الخيام يرجح أن تكون معرفته بطالع الخيام عن طريق الرواية . فالبيهقي يكتب « وقد دخلت على الإمام في خدمة والدي رحمه الله في سنة سبع وخمسمائة فسألني بيتاً في الحماسة ... » (٤) مما يعني أن البيهقي قد رأى الخيام وهو في الثامنة من عمره وأجاب

---

(١) ظهير الدين البيهقي : تاريخ حكماء الإسلام، نشر وتحقيق محمد كرد علي دمشق ١٩٤٦ م ، ص ١١٩ .
(٢) أضفناها على النص .
(٣) البيهقي : المصدر نفسه ص ١٢٠
(٤) البيهقي : المصدر نفسه ص ١٢٢

عن أسئلة سأله إياها أمام والده على سبيل الاختبار والتبسط. فليس من المعقول أن يتكلم الخيام عن طالعه مع صبي في الثامنة من عمره. ومن ناحية أخرى يذكر لنا البيهقي موضوع الحديث بينهما في هذه المقالة الوحيدة. فبعد سؤال الخيام عن بيت الشعر وهو

« ولا يرعـون أكنـاف الهوينـا   إذا حلـوا ولا أرض الهـدون » (١)

يقول البيهقي « فقلت الهوينا تصغير لا تكبير له كالثريا والحميا، والشاعر يشير إلى عز هؤلاء ومنعتهم يعني لا يسفون، إذا حلوا مكاناً إلى التقصير، ولا إلى الأمر الحقير، بل يقصدون الأسد فالأسد من معالي الأمور.

ثم سألني عن أنواع الخطوط القوسية، فقلت أنواع الخطوط القوسية أربعة، منها محيط دائرة، ومنها قوس نصف دائرة، ومنها قوس أقل من نصف دائرة، ومنها قوس أعظم من نصف دائرة. فقال لوالدي: أعرفها من أخزم » (٢).

وهكذا نرى أن معرفة طالع الخيام لم يعرفه البيهقي من حديث للخيام نفسـه ولكن عن رواية لم يذكر لنا عنها شيئاً، وليس هناك من رواية أخرى تؤيدها. فعلينا إذاً أن نأخذها كفرض يجب أن نفحص إمكانات صدقه. وهذا الفرض هو أن ميلاد الخيام يرجع لسنة ٤٤٠ هجرية أي سنة ١٠٤٨ ميلادية.

وكي نتحقق من هذا الفرض علينا أن نقابله أولاً بما يورده البيهقي نفسه في مواضع أخرى من كتابه لنرى هل هناك من تناقض قد يوقفنا دون الأخذ بما ذهب إليه. ثم نتبع هذا بمقابلته بما رواه الآخرون وعلى رأسهم، مما لا شك فيه، الخيام نفسه.

يروي البيهقي في تأريخه للحكيم علي بن محمد الحجازي القايني « أنه عاش تسعين سنة ومات في سنة ست وأربعين وخمسمائة وكان من تلامـذة الخيام » (٣) فالقايني إذاً من مواليد ٤٥٦ هجرية. فلو افترضنا أن الفرق بين الأستاذ والتلميذ هو فرق الجيل أو

---

(١) البيهقي: المصدر نفسه
(٢) البيهقي: المصدر نفسه ص ١٢٢ — ١٢٣
(٣) البيهقي: المصدر نفسه ص ١٣٩

أقل منه قليلا انتهينا إلى أن الخيام يكبر القايني بست عشرة سنة مما لا يتعارض مع ما قاله البيهقي من قبل .

وما قاله البيهقي من قبل عن مقابلته للخيام لا يناقض أيضاً التاريخ الذي أعطاه لميلاد الخيام . فمما ساقه نعرف أنه دخل على الإمام وهو في سن الثامنة ، والإمام إذاً في السابعة والستين . فمن الجلي إذاً أن ما ذكره البيهقي عن عمر الخيام لا يناقض بعضه بعضاً مهما اختلف موضع السياق مما يحفزنا أن لا نرى فيه وضعا .

فلنقابل الآن ما سبق بما رواه العروضي السمرقندي عن الخيام ووفاته.. فهو يؤكد في كتابه « **چهار مقالة** » أنه رأى الخيام في مدينة بلخ سنة ست وخمسمائة وأن الخيام قد توفي سنة ست وعشرين وخمسمائة في نيسابور . أو كما قال « في سنة ست وخمسمائة في مدينة بلخ في شارع النخاسين (برده فروشان) نزل في سراي الأمير أبي سعيد جره الإمامان عمر الخيام ومظفر الأسفزاري . وقد كنت متصلا بهذا الأمير فسمعت ، أثناء مجلس السمر ، حجة الحق عمر يقول : سيكون قبري في موضع تؤرجه ريح الشمال بشذى الورد ، كل ربيع . فبدا لي أن هذا القول مستحيل ، وكنت أعرف أن مثله لا يقول جزافا .

فلما بلغت نيسابور سنة ثلاثين وخمسمائة ، وقد خلت أربع سنوات على إيداع هذا الرجل العظيم الثرى ، وصارت الدنيا يتيمة من بعده ، وكان له علي حق الأستاذية ، ذهبت لزيارة قبره يوم الجمعة ، وقد استصحبت رجلاً يدلني على قبره ، فأخرجني إلى مقبرة الحيرة » (١) .

والنظر إلى ما رواه العروضي السمرقندي بما تحتويه من أسماء وأماكن ، وبما تتضمنه من مفارقات ، يميل بنا إلى تصديقها ، إلا إذا افترضنا أنه يتقن أساليب الوضع ويتعمده ، وهذا مما لا يؤيده دليل . فمصنف كتاب « **چهار مقالة** » لم يكن فقط معاصراً للخيام ، ولكن ضمهما مجلس من مجالس السمر في سنة ٥٠٦ هجرية . وأقل ما يمكن

---

(١) النظامي العروضي السمرقندي : چهار مقالة ، نقله إلى العربية عبد الوهاب عزام ويحيى الخشاب القاهرة ١٩٤٩م ، ص ٦٩ – ٧٠

قوله هنا أن هذا لا يتنافى البتة مع ما رواه البيهقي ، بل من روايتيهما نستطيع أن نخلص إلى أن الخيام كان على قيد الحياة في هذا التاريخ . فإذا أخذنا بكل ما ذكره البيهقي ، وبكل ما رواه العروضي ، ننتهي إلى أن الروايتين متسقتان ، أو على الأقل لا يراد بهما قصداً إثبات ما لا يكون أو كون ما لم يثبت .

وهكذا يبدو أن مولد الخيام هو حوالي سنة ٤٤٠ ﻫ (١٠٤٨ ميلادية) وأن وفاته حوالي سنة ٥٢٦ هجرية (١١٣١ ميلادية) فيكون قد عاش حوالي ثلاث وثمانين سنة ميلادية .

ولكن هناك من العبارات إن أخذت على ظاهر القول تناقض ما سبق ، ومنها ما هو للخيام نفسه وما هو لغيره . ففي رسالته عن « الكون والتكليف » يكتب الخيام « فاعلم أن هذه مسألة قد تحير فيها أكثر الناس حتى لا يكاد يوجد عاقل إلا ويعتريه في هذا الباب تحير ، ولعلي ومعلمي أفضل المتأخرين الشيخ الرئيس أبا الحسين بن عبد الله بن سينا البخاري أعلى الله درجته قد أمعنا النظر فيها وانتهى بنا البحث إلى ما قنعت به نفوسنا ... » (١)

ومن المعروف أن ابن سينا قد توفي سنة ١٠٣٧ ميلادية فيكون ميلاد الخيام قبل هذا التاريخ . فإذا قبلنا ما قاله العروضي السمرقندي يكون الخيام قد جاوز المائة مما يبدو عسر التعقل . ولقد ذكر الخيام أبا علي بن الهيثم مرات في كتبه مترحماً عليه كل مرة ، مما يدل على أنه يعرف بوفاته التي ترجع لسنة ١٠٤٠ ميلادية . فلو كان الخيام قد أدرك ابن سينا وتتلمذ عليه لكان قد أدرك ابن الهيثم ، وهذا مما لا يقوله الخيام ، أو لكان قد حرر كل ما كتبه وكل مقالاته الرياضية بعد تجاوزه الثلاثين مما لا يدل عليه شيء .

وهكذا ينتهي بنا افتراض تلمذة الخيام على ابن سينا إلى نتائج غريبة متناقضة ، ولكن إذا تذكرنا أن رسالته عن « الكون والتكليف » ما هي إلا رسالة يرد فيها على سؤال سأله إياه — تلميذ ابن سينا — أبو نصر محمد بن إبراهيم النسوي ، عن حكمة الخالق في خلق العالم خصوصاً الإنسان وتكليف الناس بالعبادات ، فإننا نستطيع تأويل كلمة

(١) الخيام : الكون والتكليف ، نشرها محي الدين صبري الكردي ضمن مجموعة الرسائل المسماة جامع البدائع بمطبعة السعادة بالقاهرة سنة ١٩١٧ ص ٣٨٠

« معلمي » التي قصد بها الخيام ابن سينا بالأستاذ الروحي، وإن لم يكن رآه تكريماً لمراسله الذي كان تلميذ ابن سينا . ومما يرجح هذا التأويل ما كتبه الصفدي فهو يقول « أخبرني الإمام شمس الدين محمد بن إبراهيم المعروف بابن الأكفاني ، وقد تقدم، قال : قرأت إشارات الرئيس أبي علي بن سينا على الشيخ شمس الدين الشرواني الصوفي بخانقاه سعيد السعداء داخل القاهرة أواخر سنة ثمان وتسعين وأوائل سنة تسع وتسعين ، وقال لي قرأتها بشرحها على شارحها خواجا نصير الدين محمد الطوسي ، قال قرأتها على الإمام أثير الدين الأبهري ، قال قرأتها على الشيخ قطب الدين إبراهيم المصري ، قال قرأتها على الإمام المعظم فخر الدين محمد الرازي ، قال قرأتها على الشيخ شرف الدين محمد المسعودي ، قال قرأتها على الشيخ أبي الفتح محمد المعروف بابن الخيام ، قال قرأتها على بهمنيار تلميذ الرئيس ، قال قرأتها على مصنفها الرئيس أبي علي بن سينا » (١) .

وإن كان هذا النص يتضمن أخطاءً عديدة منها إبدال عمر بمحمد والخيام بابن الخيام ، فإنه يصرح بأن الخيام كان تلميذا لبهمنيار ، لا للشيخ الرئيس ، ومن ثم يفصله جيل عن ابن سينا مما يتفق إجمالا مع ما ذكره البيهقي .

وهناك روايات أخرى عن مولد الخيـام ووفاته ، استقى بعضها من الروايتين السابقتين – أعني ما حكاه البيهقي والعروضي السمرقندي . وأضاف بعضهما ما لم يُحدَّث به من قبل . ومما يجب التنبيه عليه هو أنه كلما بعد الراوي عن أواسط القرن الخامس ازداد الطابع الأسطوري للرواية ، فرواية شمس الدين الشهرزوري الذي كتب بين سنة ٥٨٦ وسنة ٦١١ هجرية « في نزهة الأرواح وروضة الأفراح » لا تزيد على البيهقي إلا بعض أبيات من شعر الخيام . أما ابن الأثير فقد كتب في « كامل التواريخ » المؤلف سنة ٦٢٨ هجرية تقريبا ، في كلامه عن حوادث سنة ٤٦٧ هجرية ما يلي « وفيها جمع نظام الملك والسلطان ملكشاه جماعة من أعيان المنجمين وجعلوا النيروز أول نقطه من الحمل ، وكان النيروز قبل ذلك عند حلول الشمس نصف الحوت ، وصار ما فعله

(١) الصفدي : الوافي بالوفيات ، الجزء الثاني ص ١٤٢ فيسبادن ١٩٧٤
والصفدي يذكر هذا عند ترجمته لشمس الدين الشِّرْواني الصوفي .

السلطان مبدأ التقاويم ، وفيها عمل الرصد للسلطان ملكشاه واجتمع جماعة من أعيان المنجمين في عمله منهم عمر بن إبراهيم الخيامي وأبو المظفر الأسفزاري وميمون بن النجيب الواسطي وغيرهم ، وخرج عليه من الأموال شي عظيم وبقي الرصد دائراً إلى أن مات السلطان سنة خمس وثمانين وأربعمائة فبطل بعـد موته » (١) . ورواية ابن الأثير هذه لا تناقض ما ذهب إليه البيهقي من قبل ولا ما حدّث به العروضي السمرقندي ، فمنه نعرف أن الخيام كان بين من جمعهم نظام الملك وملكشاه، وكان عمره حينئذ سبعاً وعشرين سنة تقريباً ، وليس هذا بالمستحيل ولا بالغريب .

ويبدو أن من أول الروايات التي يغلب عليها الطابع الأسطوري هي رواية جمال الدين القفطي المتوفى سنة ٦٤٦ هـ في كتابه تأريخ الحكماء . ففي ترجمته للخيـام لا يذكر أية واقعة أو أي خبر بل يكتفي بقول عام مما يرجح أنه يجهل أمر الخيام ، ولا ينقل إلا قصة تروى وحديثا يتردد . أليس من العجيب أن لا يذكر القفطي شيئا عن شيوخ الخيام ولا عن تلامذته ؟ أليس من الغريب أن لا يقول شيئا عن كتبه ولا عن العلوم التي نبغ فيها ؟ راضيا بقوله إن الخيام « كان عديم القرين في علم النجوم والحكمة وبه يضرب المثل في هذه الأنواع لو رزق العصمة وله شعر طائر تظهر خفياته على خوافيه وتكدر عرق قصده كدر خافيه ... » (٢) . فمن رواية القفطي نجد أيضاً ما نصه عن عمر الخيام « إمام خراسان وعلامة الزمان يعلم علم يونان ويحث على طلب الواحد الديان بتطهير الحركات البدنية لتنزيه النفس الإنسانية ويأمر بالتزام السياسة المدنية حسب القواعد اليونانية . وقد وقف متأخرو الصوفية مع شي من ظواهر شعره فنقلوها إلى طريقتهم وتحاضروا بها في مجالساتهم وخلواتهم ، وبواطنها حيّاتٌ للشريعة لواسعُ ، ومجامع للأغلال جامع ، ولما قدح أهل زمانه في دينه ، وأظهروا ما أسره من مكنونه ، خشي على دمه ، وأمسك من عنان لسانه وقلمه ، وحج متاقاة لا تقية وأبدى أسرارا من السرار غير نقية ، ولما حصل ببغداد ، سعى إليه أهل طريقته في العلم القديم ، فسد دونهم الباب

---

(١) ابن الأثير : الكامل في التاريخ القاهرة المكتبة التجارية (بدون تاريخ)

(٢) جمال الدين بن يوسف القفطي : تأريخ الحكماء نشره ليبرت ليبتزج ١٩٠٣ ص ٢٤٤

سد النادم لا سد النديم ، ورجع من حجه إلى بلده يروح إلى محل العبادة ويغدو ويكتم أسراره » (١) .

فكما نرى يزعم القفطي أن الخيام قد قدح في دينه هذه واحدة ، والأخرى أنه لكي ينقذ نفسه لم يبق له إلا النفاق . إن بعض شعر الخيام في رباعياته يحث على قبول هذه الصورة التي صورها القفطي أو نقلها ، وإن لم يكن هناك ما يدل على هذا من أقوال معاصري الخيام ، كالبيهقي والعروضي . فالبيهقي الذي لم يتردد عن ذكر الخيام بسوء كما رأينا من قبل ، لا يشير إلى ما زعمه القفطي . فلو كان قد سمع بما قاله القفطي من بعده لكان قد أتى به . بل هو ينقل لنا على عكس ذلك ما رواه بهذا الصدد ختن الخيام ، الإمام محمد البغدادي ، الذي أدرك أواسط القرن السادس . فيقول البيهقي « وحكى لي ختنه الإمام محمد البغدادي أنه كان يتخالل بخلال من ذهب ، وكان يتأمل الإلهيات من الشفاء ، فلما وصل إلى فصل الواحد والكثير ، وضع الخلال بين الورقتين وقال : أدع الأزكياء حتى أوصي فوصى ، فقام وصلى ، ولم يأكل ولم يشرب . فلما صار العشاء الأخيرة سجد وكان يقول في سجوده ، اللهم إنك تعلم أني عرفتك على مبلغ إمكاني فاغفر لي فإن معرفتي إياك وسيلتي إليك ومات » (٢) .

وما يرويه ختنه ، الإمام محمد البغدادي ، عن موته قد يكون أيضا من تلك القصص التي تحكى بعد الموت . ولكنها إن أضيفت إلى ما نعرفه من مؤلفات الخيام الفلسفية تبين أن الخيام — من الناحية الفلسفية على الأقل — كان قريبا من ابن سينا ، ولم يكن من أصحاب المذاهب المتطرفة . ولكن هذا الاعتدال لا يتفق مع بعض أبيات شعره إلا إذ فسرت مجازا ، كبعض أشعار المتصوفة .

ونحن لا ننفي عن أبي الفتح غرامه بإقامة الشبهة ، وبشك عقائدي ظاهر في شعره ، ولكن نقول إننا إذا استثنينا الشاعر يبقى الخيام كآخرين متوافرين في هذا العصر من أصحاب المذاهب والجدل ، قريبا من الفلاسفة الإسلاميين .

---

(١) جمال الدين القفطي المصدر نفسه ص ٢٤٣ ، ٢٤٤

(٢) البيهقي المصدر السابق ص ١٢٣

ولعل غموض هذا الموقف للشاعر الفيلسوف هو الذي أثار أغرب ما روي عن الخيام ، أعني ما حدث به رشيد الدين فضل الله في « **جامع التواريخ** » وهي القصة المشهورة عن صداقة الخيام ونظام الملك وحسن الصباح . قال « إن أسباب العداوة التي كانت بين سيدنا حسن الصباح وعمر الخيام ونظام الملك أنهم كانوا في مدرسة واحدة ، على صفاء ، وإخاء وصداقة عظيمة ، حتى شرب كل واحد منهم من دم الآخر ، وتعاهدوا على أن من ينال منهم درجة كبيرة ، ورتبة عالية ، يجب عليه مساعدة رفيقه . وبموجب ما ذكر في تأريخ سلجوق نال نظام الملك منصب الوزارة ، فذهب إليه عمر الخيام وذكره بالعهد والمواثيق في أيام الصبا ، فتذكر نظام الملك الحقوق القديمة وقال له : لك ولاية نيسابور ونواحيها . وكان عمر رجلا كبيرا ، وحكيما فاضلا عاقلا ، فقال : ليس لي رغبة في الولاية ، ونهي العوام والأمر عليهم ، فأعطني راتبا شهريا وسنويا بحسب الوظيفة ، فخصص له نظام الملك عشرة آلاف دينار في السنة من دخل نيسابور المحروسة من دون نقص ولا انقطاع » ...

ولقد حرصنا على الاستشهاد بكلمات رشيد الدين نفسها حتى يرى القارىء الطابع القصصي للرواية الذي قد يدل على التوليد . فرشيد الدين قد قتل في القرن الثامن ، أي بعد الخيام بقرنين تقريبا . وطول الرواية نفسها قد يراد منه الإيهام بأنها خالية من الوضع . ولكن ما يبعث الشك في هذه الرواية هو تكرارها بعد إضافات منسوبة إلى نظام الملك نفسه . وهذا التردد وهذه المبالغة تدلّ على أن الراوي كان يريد أن يولد كلاما ، فأفاض في الكلام ليوهم بطول قوله أنه يأتي بالحق ، ولكن تردده في الإسناد، وإهماله إثبات هذا الإسناد نفسه ، يبين ضعف روايته . هذا ما نجده في بعض كتب المتأخرين مثل « **روضة الصفا** » لميرخند . ولو سلمنا – فرضاً – بصحة الإسناد لجمعنا بين النقائض . فنظام الملك ولد سنة ١٠١٧ ميلادية ، والصباح توفي سنة ١١٢٤ ميلادية ، والخيام سنة ١١٣١ إذا قبلنا ما قاله العروضي السمرقندي . فإذا كان الثلاثة قد تعلموا في مدرسة واحدة ، وكانت أعمارهم متقاربة حسب الرواية السابقة ، انتهينا إلى أن الخيام قد جاوز القرن بعشرين سنة . وهذا العمر الطويل شبه محال . ولو افترضنا عكس هذا ، وأن الخيام قد امتد به الأجل ليبلغ هذا العمر ، لكان قد استرعى هذا انتباه من ترجم للخيام وذكره ، على غير ما نعرفه من كتب التراجم والتواريخ .

فمن الواضح إذاً أن هذه القصة لا تحتمل النقد ولا يمكن الإقرار بها . فلا نزاع أننا لا نعرف عن حياة الخيام من الخبر اليقين إلا القليل النزر ، وهو ما رواه البيهقي والعروضي السمرقندي ، ألا وهو أنه ولد سنة ١٠٤٨ ميلادية في نيسابور على وجه التقريب ، وتوفي بها سنة ١١٣١ على أغلب الاحتمال ، وتزوج وسافر إلى بلخ وأصفهان وعمل في الرصد لنظام الملك وللملكشاه ، وقد قيل إنه مر ببغداد دون أي دليل .

مصنفات الخيام :

ينسب إلى الخيام كثير من المصنفات ، من رياضية وفلكية وطبيعية ، هذا غير رباعياته المشهورة ، التي ترجمت إلى عديد من اللغات . وهو كأهل عصره قد كتب معظم مؤلفاته العلمية والفلسفية بالعربية ، أما كتاباته الأدبية ، أي رباعياته ، فلقد دونها بلسانه ، أي بالفارسية . وسنكتفي هنا بإشارة عابرة إلى مؤلفاته لنعالج مصنفاته الجبرية فقط بالتفصيل .

ومصنفاته هي :

- رسالة في الكون والتكليف .
- تتمة الرسالة السابقة .
- الرسالة الأولى في الوجود أو « الضياء العقلي في موضوع العام الكلي » كما سماها ناشرها فيما بعد .
- رسالة في الوجود .
- رسالة بالفارسية في كلية الوجود .

وعلينا أن نضيف إلى هذه الرسائل الفلسفية المصنفات العلمية التالية :

- الزيج الملكشاهي .
- كتاب في صنعة ميزان الحكمة .
- نوروز نامة .

أما عن مصنفات الخيام الرياضية ، فلا نعرف منها إلا الرسائل التالية :

— كتاب مفقود يذكره في مقالته « في الجبر والمقابلة » يعرض فيه — على ما يبدو من كلامه — لاستخراج الجذر النوني والبرهان عليه .

— رسالة في شرح ما أشكل من مصادرات أقليدس .

— رسالة في قسمة ربع الدائرة .

— مقالة في الجبر والمقابلة .

وسنكتفي هنا بوصف كتاباته الجبرية فقط .

١ — مقالة في الجبر والمقابلة :

أ — المخطوطات :

هناك سبع مخطوطات لهذه المقالة في مكتبات العالم ، ولا نعرف لها مخطوطات أخرى . وسنتصدى لوصف كل مخطوطة بما نملكه من معلومات ، ولا نملك إلا النزر اليسير لأن تاريخ المخطوطات العربية لم يتصد له أحد إلى الآن لترسيخه ، ولا زالت تكتنفه في أذهاننا غمامات من الغموض . ولكي نمهد الطريق لمن يأتي بعدنا —وسيأتي بلا شك — لترسيخ أصول تاريخ المخطوطات العربية ، رأينا أن نبدأ ولو باليسير ، ملتزمين فقط بالحذر العلمي . فسنعرض الآن لكل مخطوطة على حدة لكي نستشف من هذا العرض ، ولو القليل من تاريخها الذي سيرتكز عليه تحقيقنا لرسالة الخيام هذه .

١ — مخطوطة المكتبة الوطنية بباريس رقم ٢٤٦١

لقد أشرنا إلى هذه المخطوطة بحرفي « با » وهي في خمس وعشرين ورقة طول كلٍّ منها ١٨,١ سنتيمترا وعرضها ١٣,٣ سنتيمترا . أما عن النص فهو مكتوب داخلَ مستطيل مرسوم بالحبر الأحمر طوله ١٣ سنتيمتراً وعرضه ٩,٣ سنتيمتراً . والصفحة تحتوي على تسعة عشر سطراً والسطر على ثلاث عشرة كلمة تقريبا . أما النص نفسه فهو مكتوب بخط نسخ جميل بحبر أسود ، مع إهمال الإعجام وأشكاله مرسومة بوضوح بحبر أحمر .

وهذه المخطوطة هي من المخطوطات التي جمعها Vanslebe أثناء رحلته إلى القاهرة ، حلب ، إسطنبول ، بين سنة ١٦٧١ م وسنة ١٦٧٣ م .

وعندما نفحص هذه المخطوطة نعرف أنها لم تنسخ في إحدى هذه المدن المذكورة ولكن في أركنج Urgenč في خوارزم ، إذ نقرأ في صفحة العنوان أنها إحدى رسائل مجموعة كتبت كلها هناك أو كما يقول « هذه المجموعة كتبت من أولها إلى آخرها في أركنج خوارزم حماها الله تعالى عن البليات والآفات » .

وهذه المجموعة كانت تتضمن أصلا كما هو مكتوب في الفهرست على الصفحة الأولى : رسالة في عمل الكرة ورسالة أخرى في الجبر والمقابلة لم نهتد إلى قراءة أسماء مؤلفيها المطموسة ، ورسالة في شرح الخطبة التوحيدية لشرف الدين المسعودي ثم نص هذه الخطبة نفسها لابن سينا .

ولقد بقيت هذه المجموعة في خوارزم في حوزة مؤقت الجامع الجديد سلطان محمد خان واسمه يوسف بن عمر الداعي . ولا ندري مع هذا متى كان انفصال رسالة الخيام عن بقية المجموعة . فالنسخ قد تم إذاً في أركنج خوارزم ، ولكن تاريخه صعب التحديد بالدقة . ونقرأ في نهاية الرسالة ما يلي « تمت الرسالة يوم الأحد الثالث والعشرين من شهر ربيع الأول سنة ... » ويعقب كلمة « سنة » أخرى غير مقروءة . ولقد زعم الأستاذ غلامحسين مصاحب (١) أن هذه الكلمة هي ٥٢٣ هجرية . وهذا مستحيل لأن المجموعة التي نسخت في نفس التاريخ كما أشرنا تتضمن رسالة لشرف الدين المسعودي الذي كتب وألف في النصف الثاني من القرن السادس على أغلب الظن . ونستطيع أن ننتهي إلى أن هذه المخطوطة قد نسخت في القرن السادس الهجري وربما سنة ستمائة لموافقة يوم الأحد للثالث والعشرين من شهر ربيع الأول .

٢ – مخطوطة المكتبة الوطنية بباريس رقم ٢٤٥٨

ولقد أشرنا إليها بحرف « ب » وهي مجموعة تتضمن رسائل رياضية عدة منها ثلاث رسائل للسجزي ورسالة ابن الهيثم المشهورة – « في المعلومات » – وآخر رسالة فيها هي « مقالة » الخيام أو بالأحرى جزء منها فقط ، أي خمس ورقات ، من صفحة ٢٨ – وإلى ٣٢ – ظ وكل ورقـة طولها ٢٥,٨ سنتيمترا وعرضها ١٥,٩ سنتيمترا .

---

(١) انظر غلامحسين مصاحب : حكيم عمر خيام بعنوان عالم جبر : تهران ١٣٣٩ هـ ش صفحة ٣٠٣

والجزء المكتوب طوله ٢١,٦ سنتيمترا وعرضه ١٣ سنتيمترا . وكل صفحة تحتوي على ثلاثين سطرا وكل سطر على أربع عشرة كلمة تقريبا . والخط نسخ مقبول . ولقد كتب النص بحبر أسود ورسمت الأشكال حتى صفحة ٣١ – ظ بحبر أحمر ثم أهملت في صفحتي ٣٢ و – ٣٢ ظ . ويدل إهمال الأشكال وعدم العناية بالخط والنقل وتوقف النسخ في وسط الصفحة على أن الناسخ لم يتم العمل الذي بدأه .

أما عن المخطوطة نفسها فعليها آثار الرطوبة التي طمست كثيرا من سطورها . وهي في فرنسا منذ القرن السابع عشر ، فلقد ورثتها المكتبة الوطنية من مكتبة Melchissedech Thévenot المتوفى سنة ١٦٩١ م ، ولقد كان رقمها على قائمة كتبه : ٢٨١ .

أما عن مكان النسخ فلا ندري عنه شيئاً وإذا كان تاريخه هو سنة ٥٣٩ هجرية أي سنة ١١٤٤ ميلادية ، ففي الرسائل الثلاث الأولى يذكر الناسخ التاريخ وهو « شوال سنة ثلط هجرية » ولكنه لم يذكر اسمه ولا مكان النسخ .

ومن ثم تبدو هذه المخطوطة أقدم ما وصل إلينا من مخطوطات مقالة الخيام ، فلقد كتبت بعد وفاة المؤلف بثلاث عشرة سنة إذا أخذنا بالتاريخ المقترح من قبل .

٣ – مخطوطة مكتبة جامعة كولومبيا – نيويورك – سميث شرقيات ٤٥ (٨)
Smith. Ms. Or. 45 (8).

وقد أشرنا إليها بحرف « ك » وهي مجموعة رياضية نفيسة تتضمن بين عديد من الرسائل مقالة الخيام . وهذه المقالة في ثمان وعشرين ورقة ، وكل صفحة منها تحتوي على تسعة عشر سطراً ، وكل سطر يتضمن عشر كلمات على وجه التقريب والخط نسخ واضح ، أما الأشكال فقد رسمت دون إتقان . أما عن مقاييس المخطوطة فطول الصفحة ٢١ سنتيمترا وعرضها ١٤ سنتيمترا . وأغلب الظن أن هذه المخطوطة قد نسخت في القرن الثالث عشر الميلادي فالمجموعة تتضمن رسالة لشرف الدين الطوسي كتبت بهمدان سنة ست وستمائة هجرية . وهذا هو الحد الأدنى لتاريخ الناسخ .

لقد سبق أن بينا في تحقيقنا لرسالة الطوسي التي ذكرناها (١) أن هذه المخطوطة هي الأصل المباشر لمخطوطة ليدن — Or. 14 — المشهورة . فإذا وقفنا الآن على ما أورده R. P. A. Dozy منذ أكثر من قرن في مقدمة فهارسه لمكتبة ليدن (٢) فهمنا ما تم ، فمنه نعرف أن المستشرق الهولندي Golius من القرن السابع عشر ، الذي ساهم بنشاط في جمع ونقل المخطوطات العلمية العربيـــة إلى هولندا ، والذي كان على صلة بالعديد من الرياضيين في هذا القرن : قد استعار ما لم يستطع شراءه من المخطوطات وطلب نسخه من عربي مقيم حينئذ بمدينة أمستردام . إذ رفض بعض الشرقيين بيع ما يمتلكونه من مخطوطات وقبلوا إعارته إياها . ومن بين ما نُقل مخطوطة ليدن الشهيرة . وبمقارنة مخطوطة كولومبيا ومخطوطة ليدن ننتهي بما لا يقبل الشك إلى أن الأولى هي الأصل الذي نقله عربي أمستردام وحفظ منذ القرن السابع عشر في ليدن . ومنذ هذا التاريخ لا نعرف شيئا عن مخطوطة كولومبيا إلا ظهورها من جديد في مجموعة Smith في كولومبيا .

هل أعادها Golius إلى أصحابها في الشرق ومنه فيما بعد بزمن طويل نُقلت إلى نيويورك ؟ كيف انتهى بها المطاف إلى كولومبيا وعن أية طريق ؟ على هذا السؤال لم نحظ بجواب شاف من أمناء مكتبة جامعة كولومبيا لندرة المستندات على ما يبدو .

كان علينا بعد بيان وإثبات ما سبق إسقاط مخطوطة ليدن عند التحقيق ، ولكننا لم نفعل إذ كان هدفنا أيضاً إقامـــة البرهان نفسه ليقنع من يراوده الشك وذلك لأهمية مخطوطة ليدن .

٤ — مخطوطة ليدن — شرقيات ١٤ Leiden Or. 14

وهي كما ذكرنا مجموعة نفيسة نقلت في القرن السابع عشر في أمستردام عن مخطوطة

(1) R. Rashed : Un Problème Arithmético-géométrique de Sharaf al-Dīn al-Ṭūsī, in *Journal for the History of Arabic Science*, vol 2, n. 2, 1978, p. 247.

(2) Catalogus Codicum Orientalium Bibliothecae Academiae Lugduno Batavae; Brill 1851, p. XV.

كولومبيا ومقالة الخيام في ٤٤ ورقة — من صفحة ١٧٥ إلى صفحة ٢١٨ — وكل صفحة طولها ٢٩,٥ سنتيمتراً وعرضها ١٩,٨ سنتيمتراً ، وتحتوي على ستة وعشرين سطرا ، وكل سطر على عشر كلمات تقريبا والخط نسخ ونقلت الأشكال مع زيادة في التحريف من الأصل . ولقد رمزنا لها بالحرف ل .

٥ — مخطوطة المكتب الهندي بلندن رقم ١٢٧٠ انظر فهرس Loth رقم ٧٣٤

وهذه المجموعة بدون شك من أنفس المجموعات الرياضية وقد كتبت كلّ رسائلها بنفس الخط وهو نسخ واضح ، ولكن لا ندري بالدقة مكان وتاريخ نسخها ، ربما القرن العاشر الهجري .

ورسالة الخيام تقع بين صفحتي ٤٨ — وو ٥٦ — و ، وكل صفحة طولها ٢٧,٣ سنتيمترا وعرضها ١٢,٥ سنتيمترا ، وتحتوي على سبعة وثلاثين سطرا ، وكل سطر على أربع عشرة كلمة تقريبا . وينقص مقالة الخيام جزء كما هو مبين عند التحقيق، ونجهل تاريخ هذه المخطوطة الذي لم يتعرض له أحد رغم أن هذه المجموعة تحتوي على عدة مقالات لابن الهيثم .

٦ — مخطوطة الفاتيكان باربريني شرقيات ٣٦ Barb. Or. 36

وعنوانها «كتاب فيه رسالة عمر الخيام في الجبر والمقابلة رحمة الله عليه وهي ٥ وعشرين صنفا وخمسين شكلا فرغ من نسخه < في > مستهل شوال سنة سبع وستمائة».

وتنتهي رسالة الخيام هكذا «تمت الرسالة المعروفة لعمر الخيام رحمة الله عليه في مستهل شوال سنة سبع وستمائة وصلى الله على سيدنا محمد وآله أجمعين » وكل صفحة طولها ١٨,٧ سنتيمترا وعرضها ١٣ سنتيمتراً ، وتحتوي على أحد عشر سطرا ،وكل سطر على عشر كلمات على وجه التقريب ، الخط مهمل والأشكال كذلك . ورمزنا لها بالحرف ف .

وبفحص هذه المخطوطة ومقارنتها مع الأخريات ننتهي إلى أنها ليست نقلاً لرسالة الخيام ولكن تلخيصا لها . فالناسخ يختصر العبارات أحيانا مع إهمال في التحرير ويزيد

عليها أحيانا من عنده . ويكفينا مثل واحد . وهي الفقرة : صفحة ١ من سطر خمسة إلى عشرة من النص المحقق . التي نجدها على هذه الصورة في المخطوطة « إن أحد المعاني التعليمية المحتاج إليها جدا في جزء الحكمة الرياضية هو الذي يعرف بالجبر والمقابلة، وإن له مقدمات يحتاج إليها في بعض أصنافه التي سأعددها وأحصاها معاصة جدا على أكثر الناظرين في هذا العلم . فأما المتقدمون فلم يصل إلينا منهم كلام أصلا لأنهم لم يتنبهوا عليها بعد الطلب وإنعام النظر فيها ولم يضطر البحث إياهم فلم ينقل إلى لساننا . فأما المتأخرون فقد عن لبعضهم وهو الماهاني رحمه الله في تحليله المقدمة التي أخذها أرشميدس مسلمة في الشكل الرابع من المقالة الثانية من كتاب الكرة والإسطوانة » .

وهذا الطرف يبين بوضوح أن مخطوطة الفاتيكان هي تحرير يغير صاحبه الألفاظ ليفيد ما أدركه من المعنى وليست نسخاً لرسالة الخيام . ويضطرب النص عند سرد البراهين الرياضية .

قد يظن البعض أن هذا التحرير ربما كان للخيام نفسه قبل كتابة نصه للمرة الأخيرة ، وهذا الظن يتهاوى بمجرد النظر إلى رسالة الخيام « في قسمة ربع الكرة » أي إلى ماحرره الخيام بالفعل قبل رسالته في الجبر ، فما ورد من الأولى في الثانية هو أقرب إلى ما نعرفه من المخطوطات الأخرى منه إلى نص مخطوطة الفاتيكان، هذه واحدة . وأخرى أن مخطوطة الفاتيكان تبدو للباحث المتفحص اضمحلالا للأصل لابداية له . قد يكون من المفيد دراسة هذا النوع من التحرير ومن ثم تحقيق مخطوطة الفاتيكان ، أما فيما نحن فيه، أعني تحقيق نص الخيام، فقد رأينا استبعادها منذ البداية إذ لا يمكن بما فيها من اضطراب إعتبارها أحد أصول النص . فلو أردنا تخطي هذه الاعتبارات وشئنا اعتبارها أحد أصول نص الخيام لمنعتنا ضخامة الاختلاف مع المخطوطات الأخرى عن استعمالها لإقامة نفس النص . ففي كل الأحوال لا يبقى إلا تحقيقها بشكل منفصل . وهذا عمل لا فائدة منه فيما نحن فيه .

٧ ــ مخطوطة جامعة كولومبيا : سميث شرقيات ٣٤ Smith Ms. Or. 34

وهــذه المخطوطة في تسع وتسعين صفحة كل منها تحتوي على أربعــة عشر

سطرا ، وكل سطر على ثماني كلمات تقريبا والخط نسخ جميل من القرن الثالث عشر الهجري ، ولقد نسخها كما كتب « أحقر العباد محمد عاشق خلف مولانا مولوي أحمد ديني ساكن قصبة شرقبور شريف حال فرنك لاهور محلة (فبراهر) » .

وبفحص ودراسة هذه المخطوطة ننتهي إلى أنها موضوعة . فهي وإن كانت تبدو لغير المتبصر كمخطوطة لنص مقالة الخيام نقلت عن أصول مخطوطية ، إلا أن البحث يثبت لنا أنها نقلت عن النص الذي نشره ڤبكه سنة ١٨٥١ م وأن أشكالها هي أشكال ڤبكـــه وعلى هذا الأساس لم نأخذها بعين الاعتبار عند تحقيقنا لمقالة الخيام .

والآن بعد أن استبعدنا المخطوطة السابقة لوضعها ، ومخطوطة الڤاتيكان لما بيناه ، ومخطوطة ليدن لعثورنا على أصلها ، لم يبق أمامنا إلا أربع مخطوطات علينا الآن تصنيفها ، أعني تلك التي أشرنا إليها بالحروف : ك ، ن ، با ، ب .

ولكن ما هو المنهج الذي علينا اتباعه في التصنيف؟ حقا إننا نظن أن مخطوطة ب هي أقدم ما بقي لنا من مخطوطات مقالة الخيام ، فلقد كتبت بعد وفاة مؤلف المقالة بقليل . ولقد سبق أن أشرنا إلى أنها غير كاملة . وحتى إن كان الأمر غير ما هو عليه ، أعني لو كانت كاملة ، فلا أظن أن قدم المخطوطة يعني تلقائيا جودتها . فمخطوطة الڤاتيكان مع قدمها النسبي إلا أن هذا لم يمنعنا من التوقف دون الأخذ بها في تحقيق النص ، ولا أعتقد أننا بهذا قد أتينا أمرا كبيرا لا يقرنا أحد عليه .

فالطريق لتصنيف المخطوطات يبدأ بإثبات كل الاختلافات بين المخطوطات المعتمدة ، وبيان ما ينقص كل منها بمقارنته بالأخرى وأخطاء كل منها بالنسبة للأخرى . ولكننا نقرر أن الاختلافات بل الأخطاء نفسها لا تتساوى في الأهمية . فالخطأ النحوي في كتابة الأعداد ، على سبيل المثال ، كان فاشيا بين الرياضيين في القرن الرابع الهجري وما بعده ، ولم يكن يوما بين من يكتب بالعربية عائقا عن فهم النص ولم يمثل أبداً عيبا فيه ، بل الخطأ النحوي عامة في النصوص الرياضية كان منتشرا ولم يمنع أحداً من فهم النص .

فسؤالنا كما نرى الآن هو : ما أهم الاختلافات بين المخطوطات التي تسمح لنا

بتصنيفها عندما لا نملك إلا وسائل النقد الداخلي ؟ أعني دون اللجوء إلى عوامل خارجية – لا نملكها في الأغلب – عن النسخ وتاريخه وهوية الناسخ وعلمه وقيمة النسخة التي نسخ منها ... الخ .

وأهم الاختلافات هي تلك التي يمكننا اعتبارها غير مقصودة من الناسخ نفسه ، ومن ثم فهي سقوط جملة أو سقوط أكثر من حرفين أو رقمين من النص الرياضي . فإذا وقفنا على احصاء ما ينقص كل مخطوطة بالنسبة إلى مخطوطة أخرى أمكننا الاستناد إلى هذه المبادىء في التصنيف :

– إذا نقصت مخطوطة ما جمل او حروف أو أرقام كما سبق أن أشرنا لا تنقص مخطوطة أخرى لا يمكننا اعتبار الأولى أصلا وحيداً للثانية .

– المخطوطات التي تنتمي إلى نفس الأسرة تنقصها كل الجمل أو الحروف أو الأرقام التي تنقص إحداها على الأقل .

– المخطوطات التي تنقصها جمل أو حروف أو أرقام تنقص مخطوطات أخرى من أسر مميزة فلا بد من اعتبارها نسخاً نقلت ابتداءً من أصول متعددة إما في نفس الوقت وإما بالتتابع .

هذه المبادىء البدهية التي أتينا بها هي التي اتبعناها في تصنيف المخطوطات . ولقد أقمنا الجداول لإحصاء ما ينقص المخطوطات ، الواحدة بالنسبة للأخرى ، وكذلك للأخطاء المختلفة والأخطاء المشتركة ... الخ .

وسنكتفي هنا بذكر النتائج اختصارا للمكان والتكلفة ، ومن أراد اليقين فعليه بإقامتها مما أثبتناه في هامش النص المحقق ، وهذا سهل المنال . فبمقارنة هذه المخطوطات الأربع انتهينا إلى استقلال كل واحدة منها عن الثلاث الأخر .

فلنعتبر أولا المخطوطتين الكاملتين ، أعني با و ك ، ولنحص الجمل الناقصة من كل منهما ، فنجد حينئذ أن هناك العديد من الجمل تنقص با دون أن تنقص ك والعكس كذلك ، ولن نعثر على جملة واحدة ذات أهمية خاصة تنقص با و ك معا . فإذا فحصنا

الاخطاء وجدنا أكثر من ثلاثمائة خطأ في ك سلمت منها با وحوالي نصف هذا العدد في با سلمت منها ك . أما الاخطاء المشتركة فعددها لا يزيد كثيرا عن عدد أصابع اليدين . ومن هنا لن نتجنب الصواب إن قلنا أن ك وبا لا تنحدر إحداهما من الأخرى ولا تنتميان إلى نفس الأسرة .

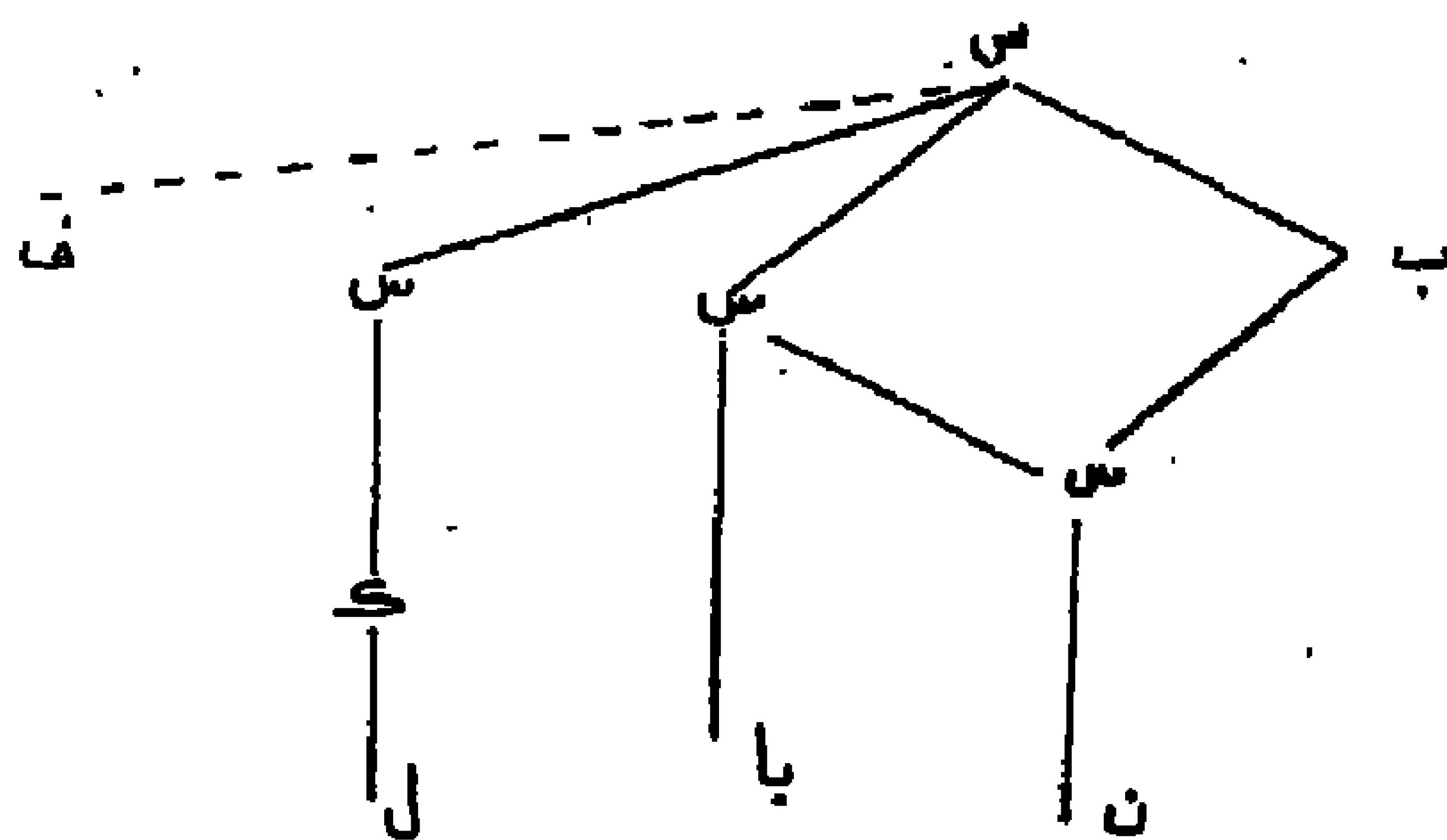
وسنصل إلى نتيجة مشابهة إذا قارنا با مع ب و ك مع ب أو بمعنى أدق الجزء المماثل لـ ب مع الجزء المماثل من با ومن ك .

ولكن الامر سيختلف بعض الشيء إذا فحصنا مخطوطة ن ، فرغم أنها حديثة النسخ وغير كاملة ، إذ تنقصها بعض الصفحات – انظر ص ٤٢ سطر ٢ من النص – إلا انها أتم المخطوطات إذا قارنا الجزء المشترك من الأخريات بها . فكل ما ينقص المخطوطات الأخرى موجود في ن . ومخطوطة ب أقرب المخطوطات منها ومخطوطة ك أبعدها من ن . ولكن هناك جملة تنقص ن نجدها في المخطوطات الأخرى وهي هذه « فبعضهم حل البعض ، وليس لواحد منهم في تعديد أصنافها وتحصيل كل صنف منها . . » انظر ص ٢ سطر ٢ ، ٣ – . وهذه الجملة لا يمكن إلا أن ترجع للخيام نفسه كما يدل عليه السياق ، إذ لا يتصور أن تكون من اختراع ناسخ . فإذا رجعنا إلى نص ن نفسه نرى أنه لا يستقيم ولا يفهم دون هذه الجملة التي أجمع عليها كلّ من با و ب و ك . هذا مما لا شك فيه ، مثل واضح للسهو أي للحذف غير المقصود الذي تحدثنا عنه من قبل ، مما يبين لنا أن مخطوطة ن لا يمكن أن تكون أصلاً لإحدى المخطوطات الثلاثة الباقية . فإذا زدنا على ذلك اختلاف وضع بعض الفقرات في هذه المخطوطة عن المخطوطات الاخرى لم يبق هناك مجال للشك فيما انتهينا إليه .

قد يزيد الأمر تعقيداً نقصان بعض الصفحات من مخطوطة ن . ولا ندري إن كان هذا يرجع إلى الناسخ نفسه أو إلى الأصل الذي نقل عنه . ونرجح السبب الثاني أي رجوع هذا إلى الأصل لما عودنا عليه ناسخ مخطوطة ن من دقة النقل ، سواء كان هذا عندما اضطلع بنقل مخطوطة الخيام أو مخطوطات أخرى حققناها من قبل من هذه المجموعة نفسها – نقصد بعض مقالات ابن الهيثم – فإن صح هذا انتهينا إلى وجود أصل مشترك – غير الأصل السابق – بين ن وبا من ناحية ، لأن با لا تنقصها إلا ثلاث

عشرة جملة — وأصل آخر مشترك بين ن و ب ، لأن الجزء المشترك بين ن و ب ينقصه جملتان فقط في ب . ولا نستطيع أن نصل إلى نتيجة مماثلة بين ن وك . فكثيرا ما يصحح ك أصله .

فإذا زدنا على كل هذا ما حصلنا عليه من مقارنة الأخطاء المشتركة بين كل مخطوطتين ، ثم عند اعتبار الكلمات الناقصة انتهينا إلى الصورة التالية ، التي تمثل فيها الاتجاه العام الذي تتابعت فيه المخطوطات وتوالت . ولن نصل إلى التتابع التاريخي الدقيق إلا بتطور تاريخ المخطوطات العربية نفسه وباكتشاف العديد من المخطوطات الجديدة . وفي هذه الصورة يمثل الخط المتصل اتجاه التتابع والخط المنقوط التحرير لا النقل . ويظهر لنا من هذه الصورة أن ما نمتلكه من مخطوطات لرسالة الخيام يرجع إلى أربع أسـر منفصلة على الأقل ، مما يدل على عدد ما زال مختفيا من المخطوطات .



ب — التحقيق والترجمات

لقد حقق ف . ڤبكـه نص مقالة الخيام معتمداً على مخطوطتي ب و با ومخطوطة ليدن ، ونشر تحقيقه مع ترجمة فرنسية سنة ١٨٥١ بباريس تحت العنوان التالي :

L'Algèbre d'Omar Alkkayyami .

وإن اختلفنا مع العالم الجليل في قراءة بعض العبارات وفي ترجمة بعض الفقرات ، بل إن اختلفنا في أكثر من هذا ولم نقرّه على ما ذهب إليه إلا أننا نحب أن نذكر هاهنا بجودة هذا العمل جملة وبما أداه مـع أعمال ڤبكـه الأخرى من خدمات للتراث العلمي العربي ولتاريخ العلوم بشكل عام .

ثم قام بعد ذلك بثمانين سنة داود قصير (؟) Kasir بترجمة النص العربي الذي نشره ڤبكه قبله إلى الانجليزية (١) . ودراسة هذه الترجمة تبين بسهولة أنها تتكيء بشدة على ترجمة ڤبكه الفرنسية أكثر من اعتمادها على النص العربي . فكثيرا ما بعد ڤبكه عن النص العربي إما لصعوبة لغوية فيه لم يتيسر حلها للمستشرق الفاضل وإما لغموض حقيقي يكتنف النص . وفي كل هذه الحالات يكرر داود قصير ما سبق أن أداه ڤبكه بالفرنسية في هذه المواضع نفسها ولكن يجب أن لا ننسى أبدا فضل داود قصير في التعريف بعمل الخيام في عالم الناطقين بالإنجليزية .

ثم جاءت ترجمة إنجليزية أخرى قام بها الأستاذان ونتر وعرفات (٢) وهذه الترجمة مستقلة عن الأخرى فلقد استعان المترجمان بمخطوطة المكتب الهندي من ناحية وحاولا الالتزام بالنص قدر الإمكان من ناحية أخرى . ثم قام بعد هذا الأستاذ غلامحسين مصاحب بنشر تحقيق ڤبكـــه مع ترجمة فارسية له .(٣) وأخيراً نقل إلى الروسية روزنفلد ويشكفتش تحقيق ڤبكـــه لرسالة الخيام وتعليقاته المختلفة .

فكما نرى لا نملك حتى يومنا هذا إلا تحقيق ڤبكه لرسالة الخيام في الجبر معتمداً على نص – أعني مخطوطة ليدن – نعرف اليوم أصله ودون الرجوع إلى مخطوطة المكتب الهندي – لظروف القرن الماضي – التي بينا أنها من أهم مخطوطات الخيام .

٢ – قسمة ربع الدائرة :

كان علينا أن نبدأ بهذه الرسالة والتعريف بها لو كان هدفنا الالتزام بالتتابع التاريخي فهذه الرسالة كما بينا عند تحليلها في القسم الآخر من الكتاب تسبق مقالة الخيام في الجبر ولكن أردنا البداية بالأهم تاريخيا لا بالأول . ولا نعرف لرسالة الخيام هذه إلا مخطوطة واحدة ، فهي ضمن مجموعة من الرسائل الرياضية بالمكتبة المركزية لجامعة طهران رقم

---

(1) Daoud S. Kasir: *The Algebra of Omar Khayyam*, N.Y. 1931.

(2) H. J. J. Winter et W. ʿArafāt: The Algebra of Umar Khayyām in *Journal of the Royal Asiatic Society of Bengal*, vol XVI, no 1, 1950, p. 27-78.

(٣) غلامحسين مصاحب : حكيم عمر خيام بعنوان عالم جبر تهران ١٣٣٩ هـ ش (١٩٦٠)

١٧٥١ ، وهي في عشر صفحات وجزء من صفحة ، خالية من الترقيم ، ولا نعرف عن هذه المخطوطة أكثر مما هو مذكور في فهرست مخطوطات المكتبة المركزية لجامعة طهران الذي ألفه الأستاذ محمد تقي دانش ونشره عام ١٩٦١ م .

وكل صفحة من هذه المخطوطة إلا الأولى تحتوي على ٢٣ سطرا ، وكل سطر على ست عشرة كلمة تقريبا . ولقد نقل هذه المخطوطة الأستاذ غلامحسين كما هي مع صورة شمسية دون تحقيق ، ولا نعرف لها تحقيقا غير ما نقوم به هنا .

ملحـــق

بعد الانتهاء من طبع نص مقالة الخيام في الجبر والمقـــابلة عثرت على مخطوطة أخرى لها بمكتبة Salar Jang بالهند ، تم نسخها « ظهيرة يوم الأحد الثالث والعشرين من شهر ربيع الأول سنة ١١١٢ هجرية » . وهذه المخطوطة في ثلاثين ورقة كلّ منها في $\frac{1}{2}$ ٦ × ٩ سنتميتراً ، وتحتوي كل صفحة على ١٦ سطراً ، والخط نسخ جميل . وبعد دراستها لم يمكنني الحصول على صورة لها حتى أقوم بالمقارنة مع المخطوطات الأخرى ، ولكن لا أتوقع نتائج هامة لتاريخ نسخها المتأخر . وإن سنحت الظروف سأنجز هذا فيما بعد .

وهناك أيضا بمكتبة رضا برامبور بالهند — مخطوطتان لنفس المقالة ، تم نسخهما سنة ١٣٢٧ هـ (١٩٠٩م) وسنة ١٣٢٩ هـ (١٩١١م) على التوالي ، ومن ثم لا يمكن الأخذ بهما عند تحقيق نص الخيام . وكنت أود الحصول على صورة لكل منهما حتى يطمئن قلبي ، ولكن لم أوفق رغم محاولتي .

---

(٣) عمر خيام رسائل الترجمة لبوريس روزنفليد ، المقالة الافتتاحية والتعليق لبوريس روزنفلد وادولف يوشكيفيتش — موسكو ١٩٦٢

التزمنا عند التحقيق بالقواعد المتعارف عليها بدقة بالغة ، ولكن لم نثبت الإعجام إن لم تكن هناك شبهة ، وأخذنا بالرموز التالية :

<...> نقترح إضافة ما بينهما

[...] نقترح حذف ما بينهما

/ انتهاء صفحة مخطوطة با

ب مخطوطة باريس ٢٤٥٨

با مخطوطة باريس ٢٤٦١

ك مخطوطة كولومبيا

ل مخطوطة ليدن

ن مخطوطة لندن

ف مخطوطة الڤاتيكان

محتويات الكتاب

تصـــويبات

رقم الصفحة	رقم السطر	الخطـــأ	الصـــواب
١	١ ـــ هـ	العالمين	العالمين والعاقبة للمتقين
١	٢ ـــ هـ	الأنبياء	الأنبياء أجمعين
١	٣ ـــ هـ	استبدال	استبدال « والعاقبة ... الطاهرين » بـ « والصلاة على أنبيائه » .
٢	١٠	وإتقان	وإيقان
٢	٥ ـــ هـ	ك ، ل /	ك ، ل / وإيقان : وإتقان ـــ ل ـــ
٢	٦ ـــ هـ	هذا	١١ ـــ هذا
٣	١٠	لاتباع	لإتباع
٨	١٤	وعدد	وعادٌ
٩	٦	مستعنين	مستعينين
١٣	٧	مالينْ	ماليْن
١٩	الشكل		تنقل نقطة ز إلى منتصف ه ب .
٢٣	٥ ـــ هـ	الحادية عشر	الحادية عشرة
٢٤	٢ ـــ هـ	منفرد	مفرد
٤٣	٢ ـــ هـ	أزاد	زاد
٤٤	١	/	تحذف هذه العلامة .
٤٧	١٣	/	تحذف هذه العلامة .
٧٢	٥ ـــ هـ	المهندمس	المهندس
٨٤	٢١	من	مع
٨٧	١٢	تسّول	تسوّل
٨٨	١٠	مالّه	ما لَه
٨٩	١ ، ٣	الى	إلى

رقم الصفحة	رقم السطر	الخطــأ	الصــواب
٩١	١٠	لعمرى	لعمري
٩٥	٣	وضرب آل	وضرب مربع آل
٩٥	١١	عني	عنى
٩٨	٨	الاجابة	الإجابة

مقالة
للحكيم الأوحد أبي الفتح عمر بن إبراهيم الخيامي
في الجبر والمقابلة
< مقدمة >

١-ب / إن أحدَ المعاني التعليمية المحتاج إليها في جزء الحكمة المعروفِ بالرياضي هو صناعةُ الجبر والمقابلة الموضوعةُ لاستخراج المجهولات العدديَّة والمساحيَّة ، وإن فيها أصنافا يُحتاج فيها إلى أصنافٍ من المقدمات مُعتاصةً جداً ، متعذرٌ حلها على أكثر الناظرين فيها . أما المتقدمون فلم يصل إلينا منهم كلامٌ فيها ، لَعلَّهُم لم يَتَفطنُّوا لها بعدَ الطلب والنظر أو لم يَضْطَرَّ البحثُ إياهُم إلى النظر فيها أو لم يُنقل إلى لساننا كلامُهُم فيها . وأما المتأخرون فقد عَنَّ للماهاني منهم تحليلُ المقدمةِ التي استعملها أرشميدسُ مسلمةً في الشكل الرابع من المقالة الثانية من كتابه في الكرة والأسطوانة — بالجبر ، فتأدى إلى كعاب وأموال وأعداد مُتَعَادلة فلم يتفق له حلُّها بعد أن أفكر فيها مَلِيّاً . فجزم القضاءَ بأنه مُمتنعٌ حتى نبغ أبو جعفر الخازن وحلها

١ — مقالة : بسم الله الرحمن الرحيم ، رب يسر ، الحمد لله رب العالمين ولا عدوان إلا على الظالمين والصلاة على الانبياء وخصوصا على محمد وآ له الطاهرين — ب — نفس العبارة مع استبدال « رب يسر » بـ « العزة لله تع » — ن — نفس العبارة مع استبدال « الانبياء ... الطاهرين » بكلمة « انبيائه » — با — مقالة في الجبر — ل — // ٢ ، ٣ — ب ، با ، ن : ناقص — ٧ — والمساحية : المساحية — ب — / أصنافا : ناقصة — ك ، ل — / يحتاج : ما يحتاج فيه — ك ، ل — // ٨ — متعذر : معتذر — ك ، ل — // ٩ — يتفطنوا : أولها مطموس — ن — ١٠ — الطلب : المطلب — ك ، ل — / أو : و — ك ، ل — / النظر فيها : النظر — ك ، ل / أو لم : ولم — با — // ١١ — للماهاني : كتبها الناسخ أولا للمهاني ثم حذفها وكتبها على الوجه الصحيح — ل — // ١٢ — الرابع : ٤ — با — // ١٣ — المقالة : مقالة — ك ، ل — ١٥ — بأنه : أنه — ك ، ل — / نبغ : تبع — ك ، ل — نبع — ن — ممحوة — با —

بالقطوع المخروطية ، ثم افتقر بعده جماعة من المهندسين إلى عـــدة أصناف منها . فبعضهم حلّ البعضَ ، وليس لواحد منهم في تعديد أصنافها وتحصيل أنواع كلّ صنف منها والبرهان عليها كلامٌ يُعتَدُّ به إلا على صنفين سأذكرهما . وإني . <و> لم أزل ، كنت شديدَ الحرص على تحقيق جميع أصنافها وتمييزِ المُمكن من الممتنع في أنـــواع كلّ صنف ببراهينَ لمعرفتي بأن الحاجـــة إليها في مشكلات المســـائل ماسةٌ جداً . ولم أتمكن من التجردِ لتحصيل هذا الخيرِ والمواظبةِ على الفكر فيه لاعتراض ما كان يَعُوقُني عنه من صروف الزمان ؛ فإنـــا قد مُنينا بانقراض أهل العلم ، إلا عصابةً قليلي العددِ كثيري المحنِ ، هَمُّهُم افتراصُ غفلاتِ الزمانِ ليتفرغوا في أثنائها إلى تحقيقٍ وإتقان علمٍ . وأكثر / المتشبهين بالحكماء في زماننا هذا يُلبسون الحقّ بالباطل ٢ ـ ١ فلا يتجاوزون حد التدليس والترائي بالمعرفة ، ولا ينفقون القدر الـــذي يعرفونه من العلوم إلا في أغراض بدنيّةٍ خسيسةٍ . وإن شاهدوا إنسانا مَعْنيّاً بطلب الحق وإيثار الصدق ، مجتهداً في رفض الباطل والزُّور وترك المراءاة والخداع ، استَحمقُوه وسخروا منه ، واللهُ المستعان على كل حال ، وإليه المفزعُ .

ولما مَنّ الله تعالى عليّ بالانقطاع إلى جناب ســيّدنا الأجــلّ

٢، ٣ — فبعضهم ... صنف منها : ناقصة — ن — / تعديد : كتبها الناسخ « تعديد في » ثم حذف في — ل — ٥ — تحقيق : التحقيق — ن — / جميع : ناقصة — ك ، ل — // ٧ — الخير : الخبر — ل — الجبر — ن — الخر — با — // ٨ — يعوقني : يعوق — ن — // ٩ — منينا : منا — ك ، ل — مينا — ن — // ١٠ — افتراص : اعراض — ب — اقتراض — ن — / اثنائها : ابنايها — ل — ابياتها — با — اتباتها — ن — / ليتفرغوا : ليفرغوا — ب — / تحقيق : الحقيق — ك ، ل — هذا : ناقصة — با — // ١٢ — فلا : ولا — ب ، با ، ن — / الترائي : التداى — ن — / ينفقون : يتفقون — ل — // ١٣ — يعرفونه : تعرفونه — ل — / وإن : ممحوة — ب — / شاهدوا : شاهد — ك ، ل — // ١٥ — استحمقوه : استمحقوه — ك — استمحوه — ل — استحقوه — ب — استخفوه — با — // ١٦ — المفزع : المفرغ — با ، ن ، ب — ١٧ — ٢ ، ص ٣ سيدنا ... واعداءه : ناقصة — با —

الأوحد ، قاضي القضاة ، الإمام السيد أبي طاهرٍ ، أدام الله علاءهُ وكبت حَسَدَتَه وأعداءه ، بعد اليأسِ من مشاهدة كاملٍ مثله في كلِّ فضيلة عملية ونظرية ، وجمعَ بين الإنفاذِ في العلوم وتثبتٍ في الأعمال وطلبِ الخير لكلٍّ واحد من ذي جنسه ؛ انشرح بمشاهدته صدري وارتفع بمصاحبته ذكري . وعَظُمَ بالاقتباس من أنواره أمري ، واشتدَّ بآلائه ونعمه أزري ، فلم أجد بُدّاً من أن أَنْحُوَ نَحْوَ تلافي ما فَوَّتَنيه رَيبُ الزمان ، من تلخيص ما أتحقّقه من لُبابِ المعاني الحكمية تقرباً إلى مجلسه الرفيع ، وابتدأت بتعديد هذه الأصناف من المقدمات الجبرية ، إذ الرياضياتُ أَوْلى بالتقديم ، واعتصمت بحبل التوفيق من الله تعالى ، راجياً منه أن يوفقني لاتباع هذا بتحقيقٍ ما انتهى إليه بحثي وبحثُ من تقدمني ، من العلوم التي هي أهم من غيرها ، متمسِّكاً بالعروة الوثقى من عصمته ، إنه وليُّ الإجابة وعليه التُّكْلان في كل حال . أقول بعون الله وحُسن توفيقه إن صناعة الجبر والمقابلة صناعةٌ علمية ، موضوعُها العددُ المطلق والمقاديرُ المسموحةُ من حيثُ هي مجهولةٌ ومضافةٌ إلى شيء معلومٍ به يمكن استخراجُها ، وذلك الشيءُ إما كميةٌ وإما نسبةٌ ، على وجهٍ لايشاركها فيه غيرهُا ويدلُّك عليه تصفّحُها . ومطلوبُها العوارضُ التي تلحق موضوعَها بما هو موضوعٌ لها بالصفة المذكورة ، وتمامُها

---

١ – الامام السيد : ناقصة – ك ، ل – // ١ ، ٢ – أدام ... واعداءه : ناقصة – ك ، ل – // ٣ – كل : مُخل – ن – / فضيلة : فضله – ل – / نظرية : وطرته – ك – نطرته – ل – / بين الانفاذ : من انفاذ – ب – / الإنفاذ : انفاذ – ل – الابعاد – با ، ن – // ٤ – انشرح : فانشرح – ٥ – صدري : ممحوه – ب – / ذكري : ذكر – ل – // ٦ – بآلائه : بالايه – ك ، ل ، ب ، با ، ن – / بدا من : بدا من أن يكون – ن – // ١٠ – راجيا : واجبا – ك ، ل – ١١ – بتحقيق : ممحوه – ب – / تقدمني : تقدمني من القدما – ل – // ١٣ – حال : ممحوه – ب – / في كل حال : ناقصة – با – / بعون ... توفيقه : ناقصة – با – // ١٨ – تلحق : يلحق – ن –

الوقوفُ على الطرق التعليمية التي يُتفطَّن بها لهذا النوع المذكور ، من استخراج المجهولات / العددية أو المساحية . ٢ - ب

والمقادير هي الكميةُ المتصلة ، وهي أربعة : الخط والسطح والجسم والزمان ، على ما هو مذكورٌ مجملاً في قاطيغورياس ، ومفصلاً في الحكمة الأولى . وقوم يَعدُّون المكان نوعاً قسيماً للسطح تحت جنس المتصل . والتحقيق يُبطل عليهم هذا الرأيَ ، ونصحّح أن المكان هو سطحٌ بحالٍ ، وموضعُ تحقيقه غيرُ ما نحن فيه . ولم تجرِ العادةُ بذكرِ الزمانِ في موضوعات مسائل الجبر ، ولو ذُكر لجاز . وعادة الجبريين أن يُسَمُّوا — في صناعتهم — المجهولَ الذي يُراد استخراجهُ شيئاً ، ومضروبَه في مثله مالاً ، ومضروبَ ماله فيه كعباً ، ومضروبَ ماله في مثله مالَ مالٍ ، ومضروبَ كعبه في ماله مالَ كعبٍ ، ومضروبَ كعبه في مثله كعبَ كعبٍ ، وعلى هذا القياس بالغاً ما بلغ . ومعلومٌ من كتاب أُقليدسَ في الأصول أن هذه المراتبَ كلَّها متناسبةٌ ، أعني نسبةَ الواحد إلى الجذر كنسبة الجذر إلى المال ، وكنسبةِ المال إلى الكعب ، فيكون نسبةُ العدد إلى الجذور كنسبة الجذور إلى الأموال ، وكنسبة الأموال إلى الكعاب ، وكنسبة الكعاب إلى أموال الأموال ، بالغاً ما بلَغ .

ويجب أن يُتحقق أن هذه الرسالةَ لا يفهمها إلا من يكون مُتقناً لكتاب أُقليدس في الأصول ، وكتابِه في المعطيات ، ومقالتين

---

١ — الطرق : الطوق — ك،ل — / يتفطن : يمفطن — ك ، ن — يفطن — ل — // ٢ — استخراج : ناقصة — ل — / أو : و — ب — // ٥ — وقوم : وقول — با — فقومه — ن — / قسيما : قسما — با — // ٦ — ونصحح : ويصحح — ن — // ٧ — سطح : السطح — ل — / تحقيقه : بحقيقه — ن — // ٩ — الجبريين : الجبر — ن — // ١٠ — مالا : كتبها هكذا الناسخ أولا ثم أعاد كتابتها عليها خطأ مال مال — ل — // ١٠، ١١ ومضروب ... مال مال : ناقصة — ل — // ١٤ — نسبة : نسبته — ن — // ١٦ — وكنسبة الكعاب : ناقصة — ك ،ل — ١٨ — أن : في الهامش — ل — // ١٩ — متقنا : مقناً — ن — / وكتابه : وكتاب — ك ، ل —

من كتاب أبلونيوس في المخروطات ، وأن من شذَّ عنه معرفةُ واحد من هذه الثلاثة فلا سبيلَ له إلى تحققها . ولقد تكلفتُ ألا أُحيلَ في هذه الرسالةِ إلا على هذه الكتبِ الثلاثة .

واستخراجاتُ الجبر إنما تمُّ بالمعادلة ، أعني بمعادلة هذه المراتبِ بعضِها ببعضٍ ، على ما هو مشهور . وإذا استعملَ الجبريُّ مالَ المالِ في المساحات فإن ذلك على سبيل المجاز لا على سبيل التحقيق ، إذ محالٌ أن يكون في المقادير مالُ المالِ ، والذي يقع في المقادير هو / ٢ ـ ا
البعدُ الواحدُ وهو الجذرُ أو الضلعُ إذا أضيف إلى مربعه ، ثم البُعدان وهو السطحُ ، والمالُ في المقادير هو السطحُ المربعُ ، ثم الثلاثةُ الأبعادِ وهو الجسمُ ، والمكعبُ في المقادير هو المجسمُ الذي يحيط به ستةُ مربّعات ، وإذ لا بُعدَ آخرَ فلا يقع فيها مالُ المال فضلاً عما فوقه ، وإذا قيل مالُ المال في المقادير فإنما يُقال ذلك لعددِ أجزائها عندَ المساحة لا لذواتها ممسوحةً ، وبينهما فرقٌ : فمالُ المال لا يقع في المقادير لا بالذات ولا بالعرض ، وليس كالزوج والفردِ فإنهما يقعان فيها بالعرض بحسب العددِ الذي ينفصل به اتصالها . والذي في كتب الجبريين من هذه المعادلاتِ < بين المراتب > الأربع الهندسية ، أعني الأعدادَ المطلقة والأضلاعَ والمربعاتِ والمكعباتِ ، هو ثلاثُ معادلاتٍ بين العددِ والأضلاعِ والأموالِ . وأما نحن فسنأتي بالطرق التي

١ – شذ : سد – ل ، ب – سد – با – / واحد : واحدة – ب ، ن – // ٢ – إلى : لما – ب – / ألا أحيل : لا حيل – ل – الا احمار – ب –// ٤ – تم : يتم – ن –// ٥ – ببعض : « مع ببعض » ثم حذفت « مع » – ب – / مال : فوق السطر – ل – // ٦ – سبيل : ليبل – ب – ٨ – أو : و – ن – / أضيف : أضيفت – ك ، ل – / ثم : تمر – ن – // ٩ – السطح : السطح المربع – ك ، ل – / والمال ... المربع : ناقصة – ك ، ل – // ١١ – ستة : ست – ك ، ل ، ب ، با ، ن – // ١٢ – يقال : يقا – ن – / لعدد : العدد – ن – // ١٥ – بحسب : غير مقروءة – ب – / ينفصل : نفصل – ن – // ١٨ – بين : من – ل ، ب – / بالطرق : بالطريق – ن –

بها يُمكن أن يُستخرج المجهول بالمعادلة بين أربع مراتبَ التي قلنا إنها لا يمكن أن يقع أكثرُ منها في المقادير . أعني العدد والشيء والمال والكعب . وما يمكن أن يُبرهن عليه بخواص الدائرة ، أعني بكتابيْ أقليدسَ في الأصول وفي المعطيات . يُبرهن عليه ويُبالَغ في التسهيل ، وما لا يمكن إلا بخواص القطوع المخروطية فيبرهن عليه بما في مقالتين من المخروطات . وأما البرهانُ على هذه الأصنافِ — إذا كان موضوعُ المسألة عدداً مطلقاً — فلا يمكننا ولا لواحدٍ من أصحاب الصناعة ، ولعلّ غيرَنا ممن يأتي بعدنا يَعْرفُه ، إلا في الثلاث المراتبِ الأولى وهي العدد والشيء والمال . وربما أشير إلى براهينَ عدديةٍ على ما يمكن البرهانُ عليه من كتاب أُقليدسَ . واعلم أن البرهان على هذه الطرقِ بالهندسة لا يُجزي عن البرهان عليها بالعدد إذا كان الموضوعُ عدداً لا مقداراً ممسوحاً . ألا ترى أن أُقليدسَ قد برهن على مطلوباتٍ / ٣-ب
نسبيّة مقدارية في خامسة كتابه ؛ ثم استأنف البرهان على تلك المطلوبات النسبية بعينها إذا كان موضوعها عدداً في سابعة كتابه ؟

والمعادلات بين هذه الأربعةِ إما مفرداتٌ وإما مقترناتٌ . والمفرداتُ ستة أصناف

آ : عدد يعدل جذراً بَ : عدد يعدل مالاً جَ : عدد يعدل كعباً

دَ : جذور تعدل مالاً هَ : أموال تعدل كعباً وَ : جذور تعدل كعباً

---

١ — بين أربع : بين أربعة — ك ، ن — من أربعة — ب — / مراتب : كذا في الأصول والأفصح : المراتب // ٣ — يبرهن : تبرهن — ن — / وما : ولم ما ، ثم حذفت لم — ب — // ٤ — يبرهن : تبرهن — ن — / يبالغ : تبالغ — ن — // ٥ — فيبرهن : فتبرهن — ن — // ٦ ، ٧ — موضوع المسألة : موضوعه — ك ، ل — // ٨ — الثلاث : الثلاثة — ك ، ل ، ن ، ب ، با — ١٠ — البرهان : للبرهان — ك ، ل — // ١١ — بالهندسة : بالهندسية — ك ، ل ، ب — ١٣ — نسبية : نسبته — ك ، ل — // ١٤ — النسبية : النسبة — / سابعة : السابعة — ك — ٧ — با — ١٧ — آ : الأول — با —

وثلاثةٌ من هذه الأصنافِ الستةِ مذكورةٌ في كتب الجبريين . قالوا : نسبةُ الشيء إلى المال كنسبةِ المال إلى الكعب . فيلزم أن يكون معادلةُ المال للكعب كمعادلة الشيء للمال ، وكذلك نسبة العدد إلى المال كنسبة الجذر إلى الكعب ، < فيلزم أيضا أن يكون معادلة العدد والمال كمعادلة الجذر والكعب > . ولم يبرهنوا عليه من الهندسة .

وأما العددُ الذي يكون عديلاً للمكعب فلا سبيلَ لنا إلى استخراجِ ضلعه إلا بالاستقراء من حيثُ العددُ ، وأما من حيثُ الهندسةُ فلا ينحلّ إلا بالقُطوع المخروطية .

وأما المقترنات فمنها ثلاثية ومنها رباعية :

أما الثلاثية فاثنا عشر صنفاً ، فالثلاثة الأولى منها :

آ : مال وجذر يعدل عدداً بَ : مال وعدد يعدل جذراً

جَ : جذر وعدد يعدل مالاً

وهذه الثلاثةُ مذكورةٌ في كتب الجبريين ، ومبرهنٌ عليها من جهة الهندسة ، وأما من جهة العدد فلا .

والثلاثةُ الثانيةُ منها :

آ — كعب ومال يعدل جذراً بَ — كعب وجذر يعدل مالاً

جَ — كعب يعدل جذراً ومالاً ،

فالجبريون قالوا : إن هذه الثلاثةَ الثانيةَ مناسبةٌ للثلاثة الأولى ، كلٌّ واحدٍ لنظيره ، أعني أن يكون كعبٌ وجذرٌ يعدل مالاً في قوةِ مالٍ

---

٢ — الشيء : فوق السطر — ب — // ٣ — نسبة : مكررة — ب — // ٩ — ثلاثية : ثلثة — ك ، ل — // ١٠ — فالثلاثة : ناقصة — با — // ١٢ — جذر : جذور — با — ١٦ — وجذر يعدل : وجذر تعدل — ن — // ١٧ — كعب ... مالا : جذر ومال يعدل كعبا — ك ، ل — // ١٨ — الثانية : ناقصة — ب —

وعدد يعدل جذراً ، والباقيان كذلك . ولم يبرهنوا عليها إذا كان موضوعُ المسائل ممسوحات . وأما إذا كان موضوع المسائل عدداً فذلك ظاهرٌ من كتاب الأصول وسأبرهن على الهندسيّ منها . والستةُ الباقية من الأصناف الاثني عشر :

آ – كعب وجذر يعدل / عدداً بَ – كعب وعدد يعدل جذراً ٤ ـ ١
جَ – عدد وجذر يعدل كعباً دَ – كعب ومال يعدل عدداً
هَ – كعب وعدد يعدل مالاً وَ – عدد ومال يعدل كعباً

وهذه الستةُ الأصنافِ لم يُوجد في كتبهم منها شيءٌ إلا الكلامَ في واحد منها مُبْتَراً ، وسأبيّنها وأبرهن عليها من جهة الهندسة لا من جهة العدد .

والبرهان على هذه الستة لا يمكن إلا بخواصّ القُطوع المخروطية .

وأما المقترنات الرباعية فقسمان ، أحدهما – وهو الأول – ما يكون فيه ثلاثُ مراتبَ معادلةٍ لواحدة ، وهو أربعة أصناف :

آ – كعب ومال وجذر يعدل عدداً بَ – كعب ومال وعدد يعدل جذراً
جَ – كعب وجذر وعدد يعدل مالاً دَ – كعب يعدل جذراً ومالاً وعدداً

والقسم الثاني : هو ما يكون فيه مرتبتان معادلتان لاثنتين ، وهو ثلاثة أصناف

آ – كعب ومال يعدل جذراً وعدداً بَ – كعب وجذر يعدل مالاً وعدداً
جَ – كعب وعدد يعدل جذراً ومالاً ،

---

١ – والباقيان : والباقيات – ل – // ٥ – وعدد يعدل : وعدد تعدل – ك ، ل – ١٢ – فيه : مطموسة – ب – / مراتب : فوق السطر – ك – / معادلة لواحدة : متعادلة الواحدة – ك ، ل – / لواحدة : الواحدة – ب – // ١٦ – هو : وهو – ك ، ل – / معادلتان : معادلتين – ك ، ل ، ب ، با ، ن –

فهذه هي الأصناف السبعة الرباعية ، ولا سبيل لنا إلى تحليل شيء منها إلا بالهندسة .

أما من تقدمنا فقد اضطرّ واحدٌ منهم إلى نوعٍ من أنواع صنفٍ واحدٍ سأذكره . والبرهان على هذه الأصناف لا يتم إلا بخواصّ القُطوع المخروطية . وسنأتي بواحدٍ واحدٍ من هذه الأصناف الخمسة والعشرين ، ونبرهن عليه مستعنين بالله ، إنه من توكل عليه مخلصاً هداه وكفاه .

فالصنف الأول من المفردات : جذر يعدل عدداً .

فيكون الجذرُ معلوماً باضطرار . وحكمها في العدد والمساحات واحدٌ .

والصنف الثاني : عدد يعدل مالاً .

فيكون المال العددي معلوماً لمعادلته العددَ المعلوم ، ولا سبيلَ إلى معرفة جذره بالعدد إلا بالاستقراء . فإن من يعلمْ أن جذر خمسة وعشرين هو خمسةٌ فإنما يعلمه بالاستقراء لا بالقانون الصناعي فلا يُلتفت
٤-ب فيه إلى قول / المختلفين من أهل هذه الصناعة . وللهند طرقٌ في استخراج أضلاع المربعات والمكعبات مبنيةٌ على استقراء قليل ، وهو معرفة مربعات الصور التسعة ، أعني مربع الواحد والاثنين والثلاثة ، وكذلك مضروبُ بعضها في بعضٍ ، أعني مضروبَ الاثنين في الثلاثة

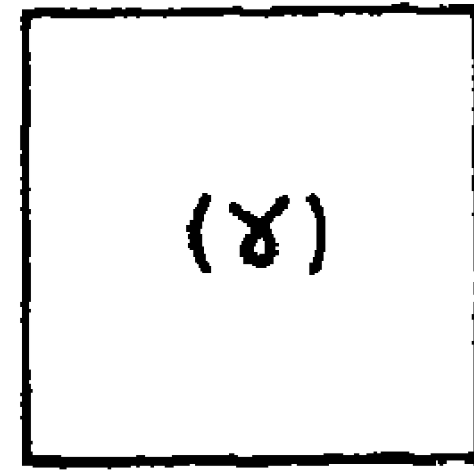
---

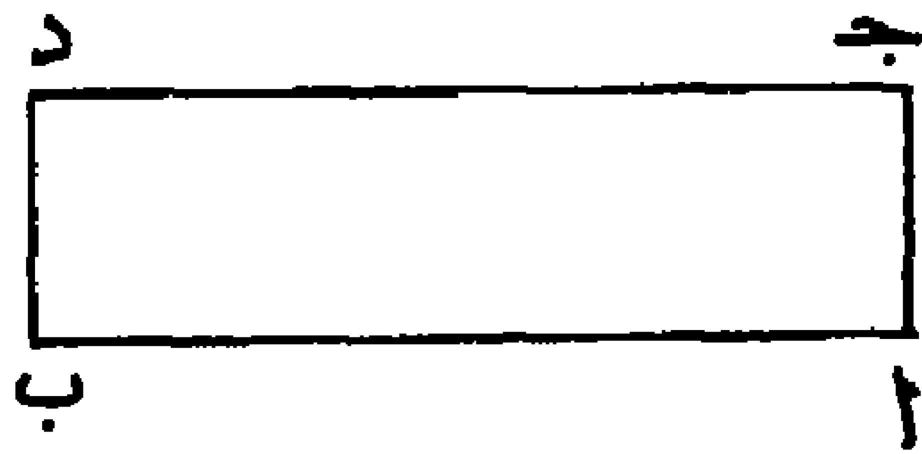
١ – هي : ناقصة – ك ، ل – / السبعة : ٧ – با – // ٢ – بالهندسة : بالهندسية – ك ، ل – ٣ – تقدمنا : فقدمنا – ك ، ل – // ٤ – على هذه الأصناف : ناقصة – با – ٥ – بواحد واحد : بواحدة واحدة – ب – / من هذه الأصناف : مكررة – ل – ٦ ، ٧ – مستعنين ... وكفاه : إن شاء الله – ك ، ل – / توكل : يتوكل – ن – // ١٢ – العدد : ناقصة – ب – // ١٣ ، ١٤ – فإن ... بالاستقراء : ناقصة – ك ، ل – // ١٤ – يلتفت : نلتفت – ل – تلتفت – ب – والتنقيط غير تام في المخطوطات الأخرى // ١٥ – فيه : كتبها الناسخ « إليه » ثم صححها عليها ونسي الألف – ل – / المختلفين : المتخلفين – با ، ك ، ل ، ن – / وللهند : والهند – ك ، ل – // ١٨ – مضروب : مضروبها في – ل –

ونحوها ، ولنا كتاب في البرهان على صحــة تلك الطرق وتأديتهـا إلى المطلوبات . وقد غزّرنا أنواعها ، أعني من استخراج أضلاع مال المال ومال الكعب وكعب الكعب ، بالغاً ما بلغ ، ولم نُسبق إليــه ، وتلك البراهينُ إنما هي براهينُ عدديــةٌ مبنية على عــدديات كتــاب الأسْطِقِساّت .

والبرهان على الصنف الثاني بالهندسة هو هكذا :

نضع خط ا ب مفروضاً مساوياً للعدد المفروض ، و ا ج واحداً ويكون عموداً على ا ب ، ونتمم سطح ا د ، فمعلومٌ أن مساحة سطح ا د تكون ذلك العدد المفروض . فنعمل سطحاً مربعاً مساوياً لسطح ا د وهو مربع ه كما بيّنه أقليدس في شكل يد من مقــالة ب من كتابه ، فمربع ه يكون مثلَ العدد المفروض ويكون معلوما ، وضلعهُ أيضاً يكــون معلوما . تأمل البرهان الذي أتى به عليه أقليدس . وذلك المراد :





وكلما قلنا : عدد يساوي سطحاً في هــذه الرسالة فإنا نعني بالعــدد هناك سطحاً قائمَ الزوايا ، أحــدُ ضلعَيه واحدٌ والثاني خطٌ مســاوٍ

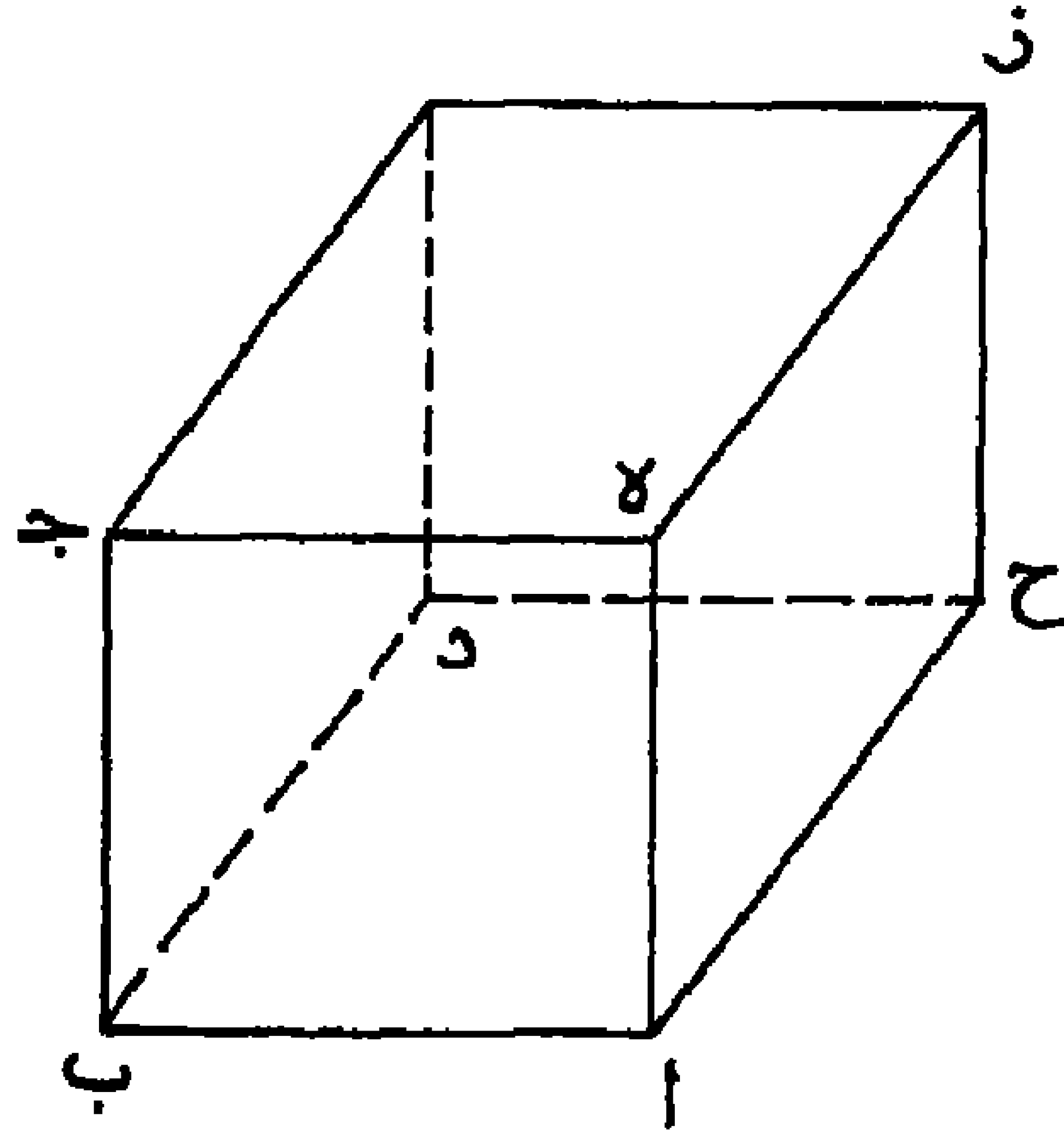
---

١ – ونحوها : ناقصة – با ، ن ، ب – / وتأديتّها: وتأديها – ك ، ل – // ٢ – غزرنا: عررنا – ك – عددنا – ل – عرُدنا – ب – عررنا – با – غررنا وتغزير – ن – / أنواعها : بأنواعها – ن – // ٣ – نسبق : يسبق – ل – والحرف الأول غير منقوط في – ك ، ب ، با – ٥ – الاسطقسات : الاسطقصات – ك ، ل – // ٦ – هو : وهو – ل – // ٧ – نضع: نضع – ك – يضع – ل – // ٨ – ونتمم : ويتمم – ن – // ٩ – تكون : يكون – ن – ١٠ – فمربع : في الهامش – ك – // ١٢ – به : ناقصة – ل – // ١٣ – عدد : عددا – ل – / فإنا نعنى : الأصح « عنينا » وهي مكررة بعد على هذه الصورة فسنتركها كما جاءت ولن نشير إليها مرة أخرى // ١٤ – أحد : وأحد – با – / والثاني : والباقي – ك ، ل –

للعدد المفروض بالمساحة ، وكلٌّ واحدٍ من أجزاء مساحته مساوٍ للضلع الثاني ، أعني به الذي فرضناه واحداً .

والصنف الثالث : عدد يعدل مكعباً .

فإذا كان الموضوع عدداً فيكون المكعب معلوماً ولا سبيلَ إلى استخراج ضلعه إلا بالاستقراء ، وكذلك في جميع المراتب العددية من مال المال ومال الكعب وكعب الكعب ، كما ذكرناه آنفاً . وأما / ٥ - ا
بالهندسة فإنا نضع مربع $\overline{\text{ا د}}$ مربع الواحد ، أعني أن يكون $\overline{\text{ا ب}}$ مثلَ $\overline{\text{ب د}}$ ، وكلٌّ واحد منهما يُفرض واحداً . ثم نقيم على سطح $\overline{\text{ا د}}$ على نقطة $\overline{\text{ب}}$ منه عمودَ $\overline{\text{ب ج}}$ ونجعله مساوياً للعدد المفروض كما بيّنه أقليدس في القول الحادي عشر من كتابه ، ونتمم مجسّم $\overline{\text{ا ب ج د ه ز ح}}$. فمعلومٌ أن مساحة هذا المجسم تكون مساوية للعدد المفروض . فنعمل مكعباً مساوياً لهذا المجسّم ، وعمله لا يتم إلا بخواصّ القُطوع المخروطية ، فأخرناه إلى أن نأتي بمقدمات لها .



١ - للعدد : العدد - ك ، ل - // ٢ - واحدا : واحد - ل - // ٨ - يفرض : نفرض - ن - / نقيم : يقيم - ن - // ٩ - ونجعله : وجعله - ك - فجعله - ل - // ١٠ - الحادي عشر : يا - با - / ونتمم : ويتمم - ل - // ١١ - تكون : يكون - ل ، ن - / مساوية : مساويا - ل - / للعدد - بالعدد - با - // ١٣ - نأتي : يأتي - ل - / بمقدمات : مقدمات - ك ، ل -

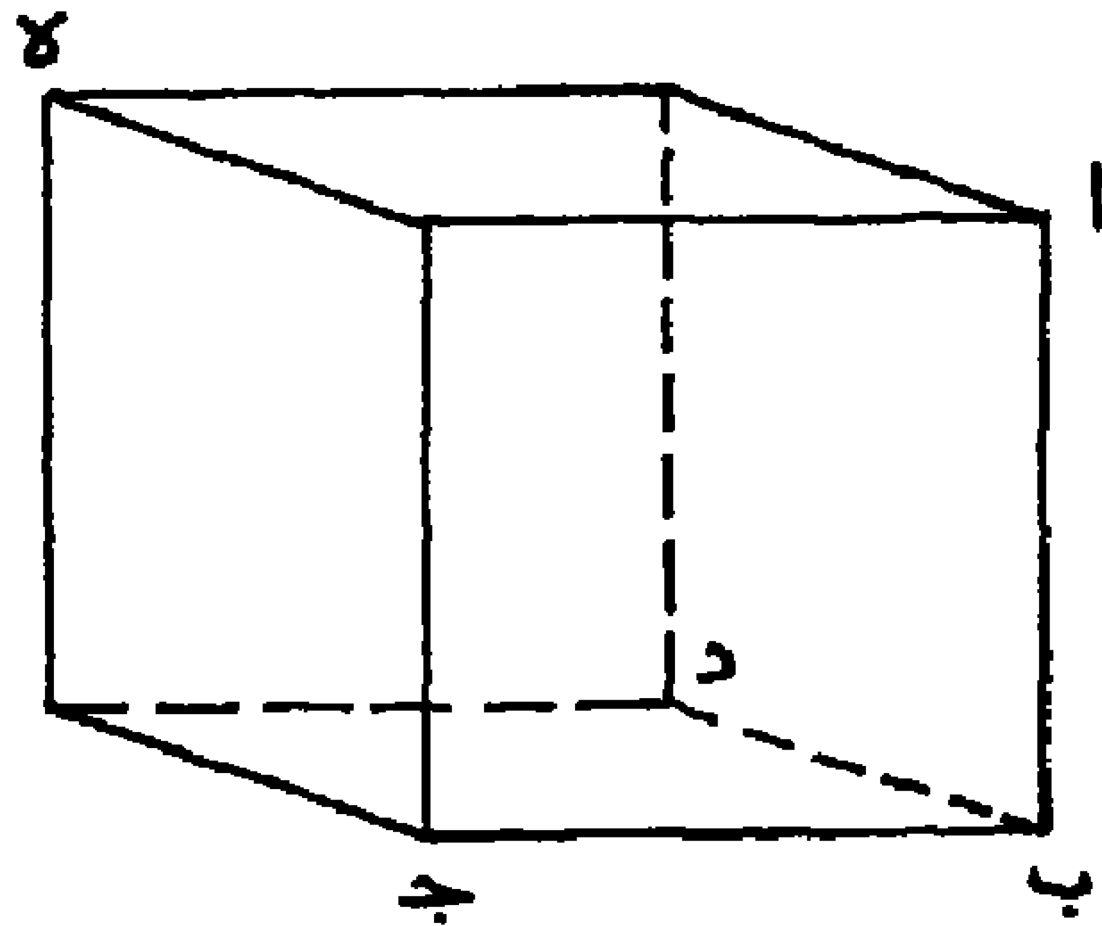
وكلما قلنا : عدد يساوي مجسماً فإنا نعني بالعدد هناك مجسّماً متوازيَ الأضلاع قائم الزوايا تكون قاعدته مربعَ الواحد وارتفاعُه مساوياً للعدد المفروض .

والصنف الرابع : مال يعدل خمسة أجذاره

فتكون عدّةُ الأجذار هي جذر المال ، وبرهانه بالعدد : هو أن الجذر إذا ضُرِب في مثله حصلَ المال . وهذا جذرٌ إذا ضُرب في خمسة حصل المال ، فهو خمسة . وبرهانه بالهندسة شبيهُ هذا إذا وضعتَ سطحا مربعاً عديلا لخمسة أضلاعه .

والصنف الخامس : أشياءُ تعدل كعباً .

فبالعدد : بَيِّنٌ أنه يكون مثلَ عددٍ يعدل مالاً . مثاله : أربعةُ أجذارٍ تعدل كعباً ، يكون كأنه قال : أربعةُ أعدادٍ تعدل مالاً لما كانَ التناسبُ المذكورُ . وأما بالهندسة : نضع مكعبَ $\overline{\text{ا ب ج د ه}}$ ومساحتَهُ عديلةً لمساحة أربعة أضلاعه وضلعَهُ $\overline{\text{ا ب}}$ ، فيكون ضلعُه الذي هو $\overline{\text{ا ب}}$ إذا ضُرب في أربعةٍ يحصل مكعبُ $\overline{\text{ا ب ج د ه}}$ إلا



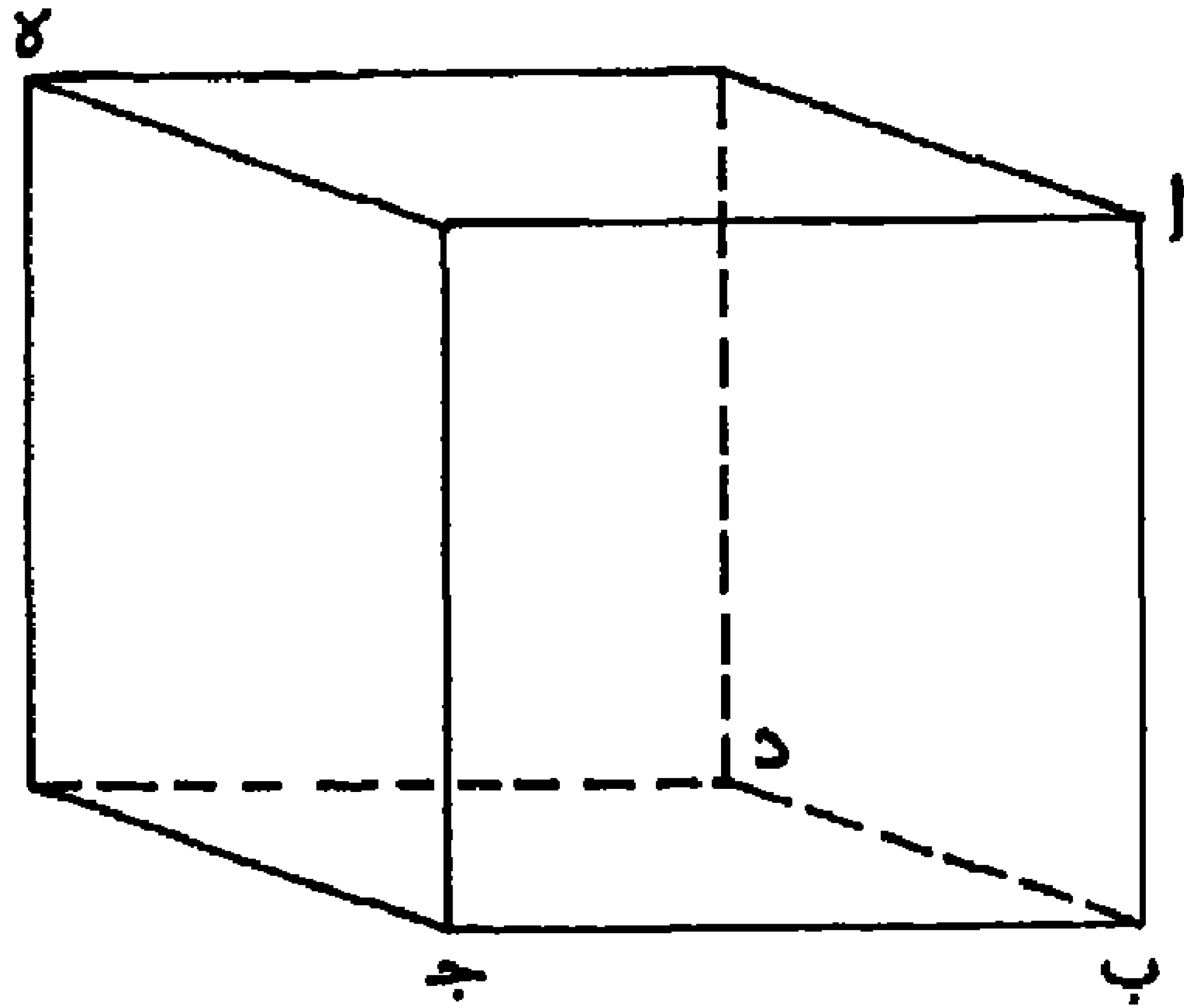
---

٢ – تكون : يكون – ن – / مساويا : مساو – با – // ٥ – فتكون : فيكون – ل ، ن – / عدة : عدد – ن – / هي : هو – با ، ن – / وبرهانه : فبرهانه – ب – // ٩ – تعدل : يعدل – ن – // ١٠ – بين : من – ك ، ل – // ١١ – تعدل : يعدل – ك ، ل ، ن – ١٢ – ومساحته : ومساحة – ب – ومساحية – با – / أضلاعه : كتبها أضلاع ثم صححها عليها – ل – ١٤ ، ١ ص ١٣ – في أربعة ... ضرب : كتبها في الهامش – ب – / يحصل : فحصل – با –

أن ضلعَهُ إذا ضُرب في مربعه أعني مربعَ آجَ حصل المكعب ، فيكون مربعُ آجَ أربعةً .

والصنف السادس : أموال تعدل كعباً .

ه-ب يكون / في قوة عدد يعدل جذرا <و> برهانه بالعدد : إن نسبة العدد إلى الجذر كنسبة المال إلى الكعب كما بُيِّن في ثامنَة الأصول ، وأما بالهندسة : فإنا نضع مكعبَ ابجده عديلَ عِدَّةِ أمواله ، مثلاً عديل مالينْ ، ومربع ضلعه آجَ ، فسطح آجَ إذا ضُرب في اثنين حصل مكعب ابجده ، إلا أنه إذا ضُرب في بدَ الذي هو ضلعه حصل مكعب ابجده ، فيكون بدَ الذي هو ضلعه مثل اثنين ، وذلك المرادُ .



وكلما قلنا في هذه الرسالة : أموال المكعب ، فإنا نعني بها مربعاتِ أضلاعه .

فإذْ قد أتينا على المفردات . فلنقل على الثلاثة الأولى من الأصناف الاثني عشر الثلاثية :

---

٣ - كتب ناسخ ب في الهامش بجوار الشكل : « هذا الشكل لترجمة الصنف الخامس والسادس جميعاً » - ٥ - ثامنة : ثامن - ك ، ل - ٨ - با - // ٦ - فإنا : ناقصة - ك ، ل ، ن - ٨ - بد : ابد - ك ، ل - // ١٣ - فإذ : فإذا - ك ، ل ، ب - / فلنقل : فليقل - ك - فليقل - ل - // ١٤ - الثلاثية : البلبه - با - ولقد صححت في هامش المخطوطة بخط مختلف -

والصنف الأول منها : مال وعشرة أجذاره يعدل تسعة وثلاثين عدداً .

فاضرب نصف <عدّة> الأجذار في مثله ، وزد الحاصل على العدد ، وانقص من جذر المبلغ نصف <عدّة> الأجذار ، فالباقي هو جذر المال .

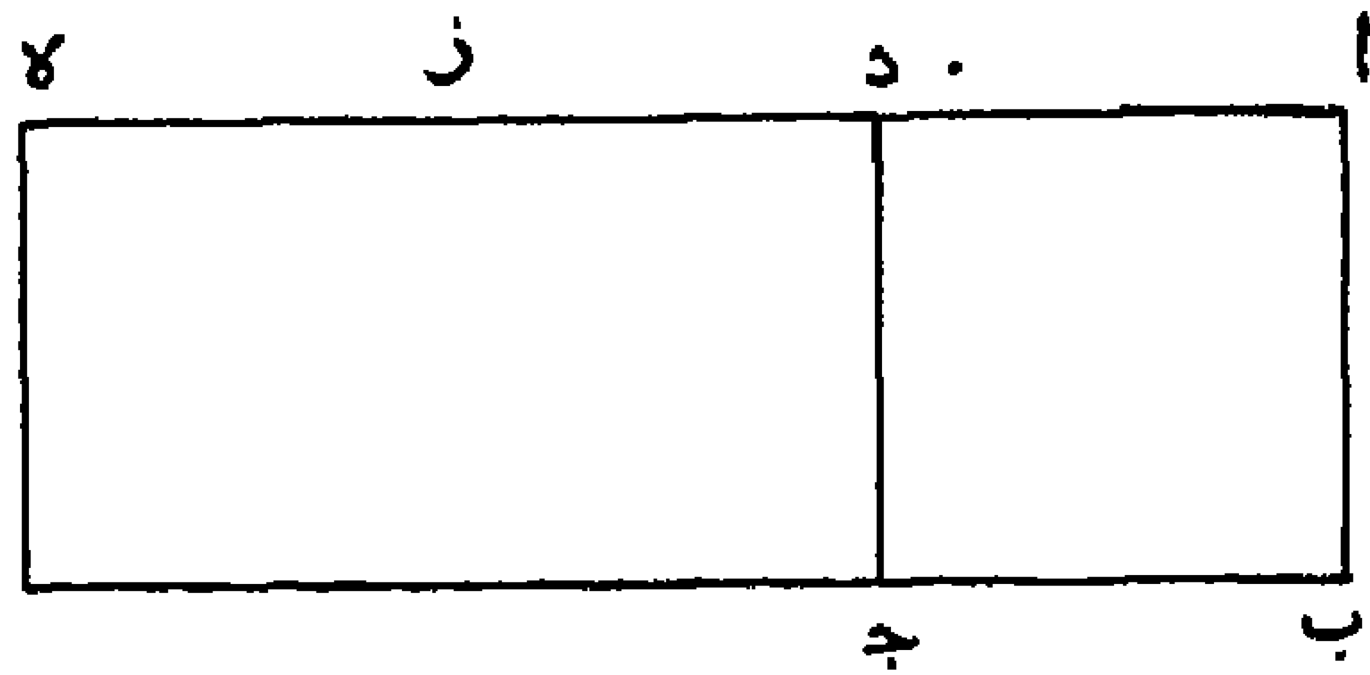
أما العدد فيحتاج إلى هذين الشرطين ، وأحدهما أن تكون عِدّةُ الأجذار عدداً زوجاً ليكون له نصفٌ ، والثاني أن يكون مربعُ نصفِ <عدّة> الأجذار والعددِ مجموعيْن عدداً مربعاً . وإلا فالمسألة مستحيلة من حيث العدد .

وأما بالهندسة فلا يستحيل شيء من مسائلها أصلاً . والبرهان عليه من جهة العدد سهلٌ عند تصور برهانه الهندسي . وبرهانُه الهندسي هكذا :

نضع مربع ا ج مع عشرة أجذاره عديلَ تسعةٍ وثلاثين من العدد ، وعشرةُ أجذاره هو سطح ج ه ، فيكون خطّ د ه عشرة ، وننصّفه على ز ، فلأن خط د ه قُسم بنصفين على ز وزيدَ فيه على استقامته ا د فيكون ضَرْب ه ا في ا د الذي هو مثلُ سطح ب ه مع مربع د ز مساوياً لمربع ز ا ، ومربعُ د ز الذي هو نصف <عدّة> الأجذار معلومٌ ، وسطحُ ب ه الذي / هو العدد المفروض معلومٌ ، فيكون مربع ٦ ـ
ز ا معلوماً وخط ز ا معلوماً ، وإذا نقص منه ز د يبقى ا د معلوماً .

---

١ ــ والصنف : فالصنف ــ با ــ / أجذاره : أجذار ــ ك ، ل ، با ــ / يعدل : تعدل ــ ن ــ / عددا : ناقصة ــ ن ــ // ٢ ــ الأجذار : ناقصة ــ ب ــ // ٥ ــ وأحدهما : أحدهما ــ ب ــ / تكون : يكون ــ ل ، ن ــ // ٧ ــ عددا : ناقصة ــ ك ، ل ــ // ٩ ــ وأما : أما ــ ك ، ل ــ // ١٠ ، ١١ ــ وبرهانه الهندسي : ناقصة ــ ك ، ل ــ // ١٣ ــ وننصفه : وينصفه ــ ل ــ // ١٤ ــ استقامته : استقامة ــ با ــ // ١٦ ــ د ز : د ه ــ ل ــ / مساويا : مساو ــ با ــ // ١٧ ــ مربع : ناقصة ــ ك ، ل ــ // ١٨ ــ معلوما (الثانية) : معلوم ــ ك ، ل ــ / زا (الثانية) : كتبها دا ثم كتب ز تحت الدال ــ ن ــ / يبقى : بقي ــ ك ، ل ــ



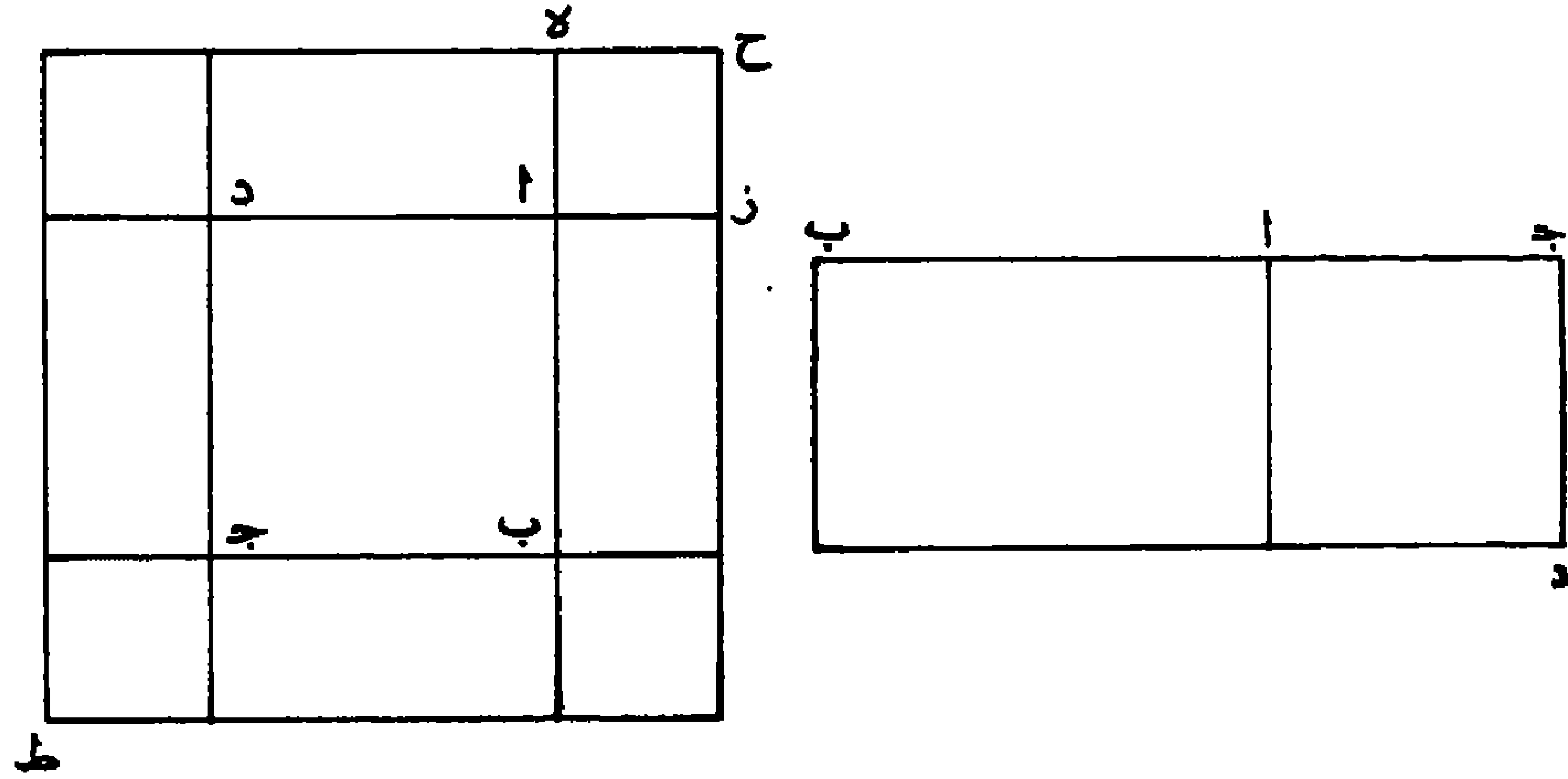
ولذلك برهان آخر : نضع اب جد مربعاً ، ونُخرج ب ا إلى ه ، ونجعل ه ا ربعَ <عدّة> الأجذار وهو اثنان ونصفٌ ، ونخرج د ا إلى ز ونجعل ز ا مثلَ ربعِ <عدة> الأجذار . وكذلك نخرج من جميع زوايا المربع خطوطاً على هذه الصفة ، ونتمم سطح ح ط فيكون مربعاً لأن ز ه مربعٌ و ا جـ مربعٌ و جـ ط مربعٌ ؛ على ما تبيّن في السادسة <من الأصول> . والمربعات الأربعة التي في زوايا المربع الكبير كلٌّ واحد منها مربع الاثنين والنصف ، فيكون جميعها خمسة وعشرين الذي هو مربع نصف <عدة> الأجذار ، وسطحُ ز ب جذران ونصفٌ من أجذار مربع ا جـ لأن ز ا اثنان ونصف ، فتكون السطوح الأربعةُ عشرةَ أجذارِ مربع ا جـ . وقد فرض مربع ا جـ مع عشرة أجذاره تسعة وثلاثين من العدد ، فيكون مربع ح ط أربعة وستين يؤخذ جذره وينقص منه خمسة يبقى ا ب .

وأما إن فرض خط ا ب عشرة وأريد مربعٌ يكون من ضرب ضلعه

---

١ – ولذلك : وكذلك – ك ، ل ، ن – / ونخرج : ويخرج – ل – / ب ا : ب – ك ، ل – ٣ – ونخرج : مطموسة – ب – // ٥ – ح ط : حـ ط – با – / مربعا : مطموسة – ب – / مربع و : مربع فيكون – ك ، ل – // ٦ – تبين : بين – ك ، ل – / السادسة : ٦ – با – ولقد أضيفت الأصول في الهامش بخط مختلف – السادس – ب – / الأربعة : الأربع – ب – ٧ – واحد : واحدة – ب – / الاثنين : ٢ – با – / جميعها : جميعا – ك ، ل ، ب ، با – ٩ – جذران : جذرين – ب – / فتكون : فيكون – ل ، ن – // ١١ – تسعة وثلاثين : ٣٩ – با – / أربعة وستين : ٦٤ – با – // ١٢ – خمسة : ٥ – با – // ١٣ – عشرة : ١٥ – با – / وأريد : وازيد – ك ، ل – / من : مع – ن –

في اب مساويا للعدد المفروض فنضع العــدد المفروض سطح هـ وهــو متوازي الأضلاع قائم الزوايا ، على ما قدمناه ، ونضيف إلى خــط اب سطحاً متوازي الأضلاع مساوياً لسطح هـ ونزيد على تمامه سطحاً مربعاً كما بيّنه أقليدس في سادسةِ الأصول ، وليكن سطحَ ب د ، والمربعُ الزائد ا د وضلعه اجـ يكونَ معلوماً على ما تبيَّن في المعطيات .



والصنف الثاني منها : مال وعدد يعدل جذرا .

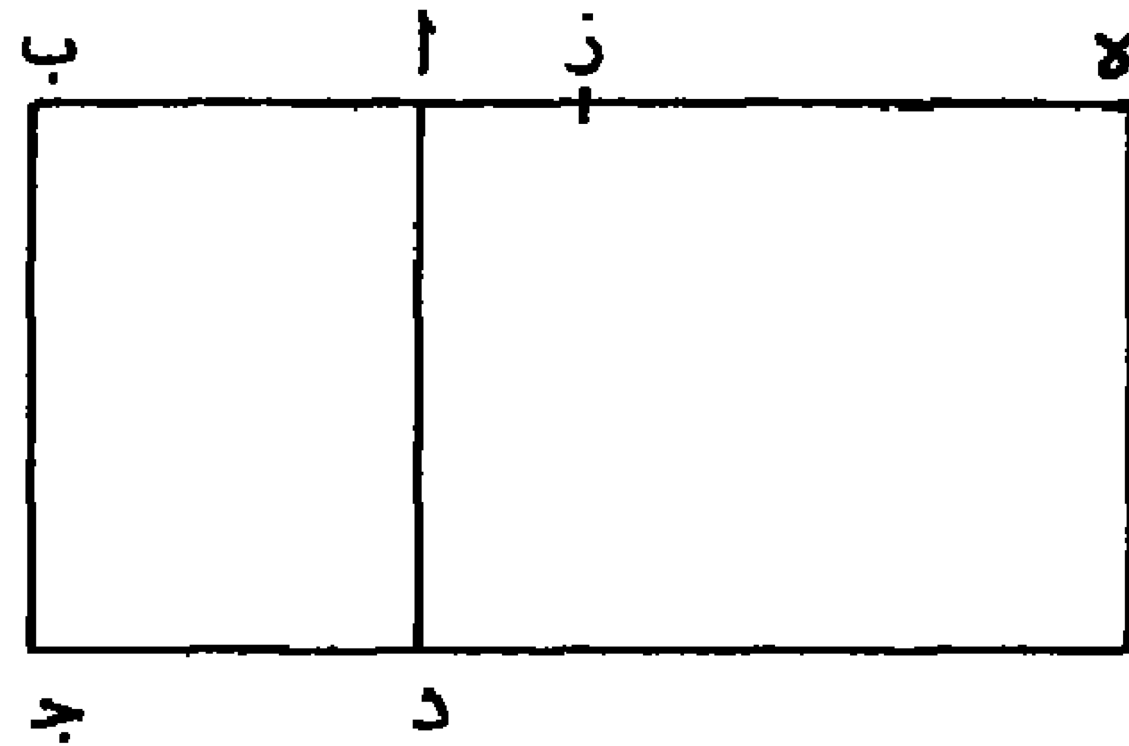
<و> هذا يجب أن يكون العدد فيه ليس بأعظمَ / من مربع ٦-ب
نصف <عدة> الأجذار وإلا فالمسألة مستحيلة ، فإن كان مثلَ مربــع نصف <عدة> الأجذار فنصفُ <عدّة> الأجذار هو جذر المال ، وإن كان أقلَّ منه نُقِص العدد من مربع نصف <عدة> الأجــذار ، وما بقي يؤخذ جذره ويزاد على نصف <عدة> الأجذار أو ينقص منه ، فما بلغ من الزيادة وما بقي من النقصان كان جذرَ المال .

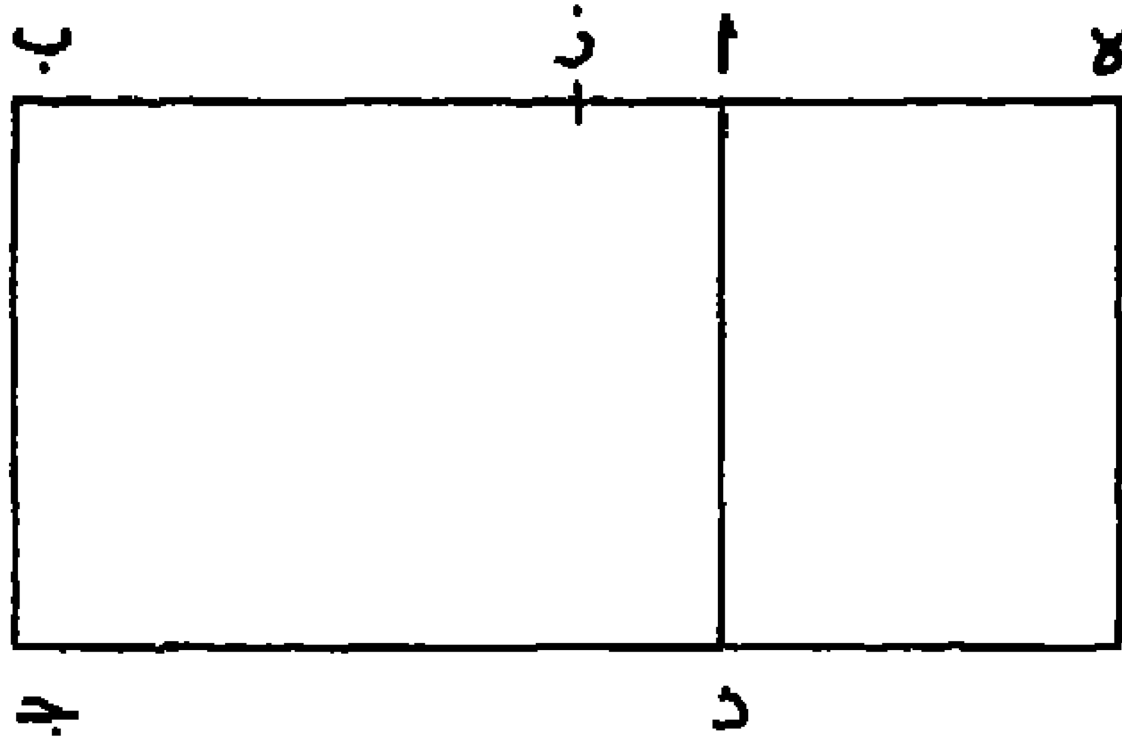
وبرهانه بالعدد يُتصور عند تصورِ برهانه الهندسي : نضــع

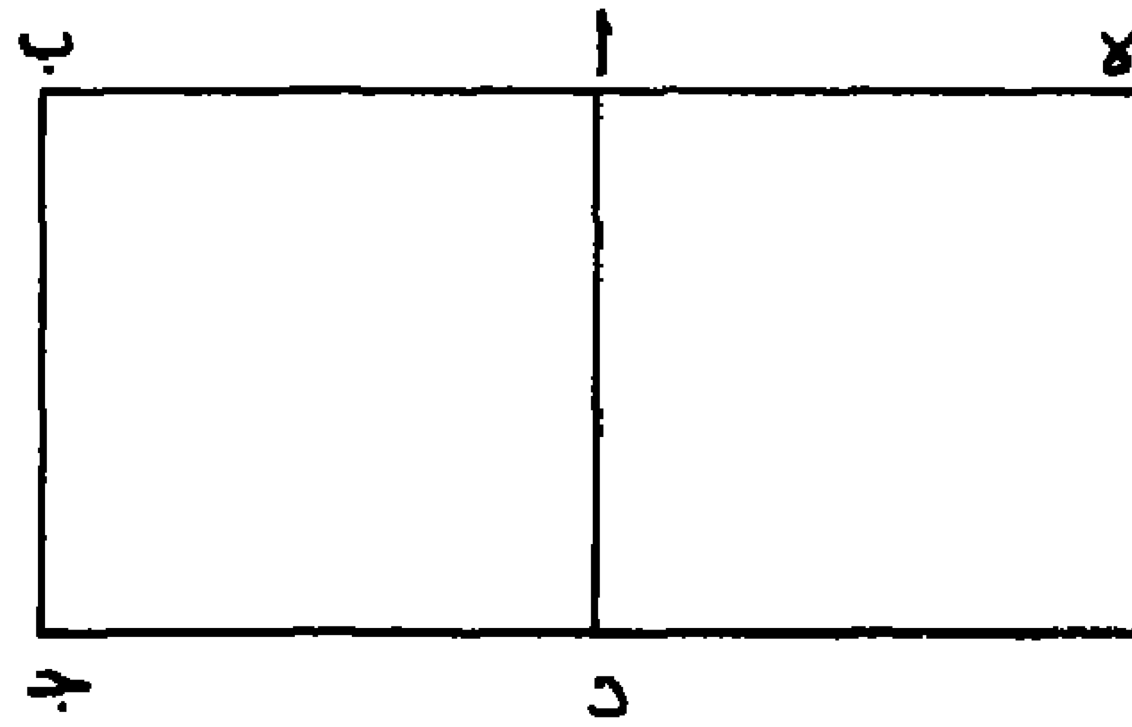
---

١ — فنضع : فيضع — ن — / فنضع العدد المفروض : ناقصة — ب — // ٢ — قدمناه : قدمنا — ب — // ٤ — سادسة : ٦ — با — / وليكن : ولكن — ب — // ٦ — يعدل : تعدل — ن — ٧ — يجب : يحسب — ل — // ٩ — هو : أضيفت التي في الهامش وبخط مختلف — ك — هو اللذى — ل — / وإن : فإن — ل — // ١٠ — منه : ناقصة — ك ، ل — // ١١ — أو : و — با — ١٣ — وبرهانه : كتبها برهان ثم صححها عليها — ب — برهاني — ك — برهان — ل —

مربع ا ب جـ د ونضع هـ د للعدد على سمت ا د فيكون سطح هـ جـ مثلاً يعدل عشرة أضلاع مربع ا جـ ، فيكون هـ ب عشرة ، وفي الأول يكون ا ب نصف هـ ب ، وفي الثاني أعظمَ من نصفه ، وفي الثالث أصغرَ من نصفه . ففي الأول يكون ا ب خمسة ، وفي الثاني نقسم هـ ب على ز وكذلك في الثالث ، فخط هـ ب قُسم بنصفين على ز * وبقسمين غير متساويين على ا فيكون سطح هـ ا في ا ب مع مربع ز ا مساوياً لمربع ز ب كما تبين في ثانية الأسْطِقِسَّات ، وسطحُ هـ ا في ا ب هو العددُ وهو معلومٌ ، وإذا نقص من مربع ز ب الذي هو نصف < عدّة > الأجذار يبقى مربعُ ز ا معلوماً . ويُنقص في الثالث من ز ب وفي الثاني يُزاد عليه مبلغ ا ز يبقى ا ب وذلك المرادُ .





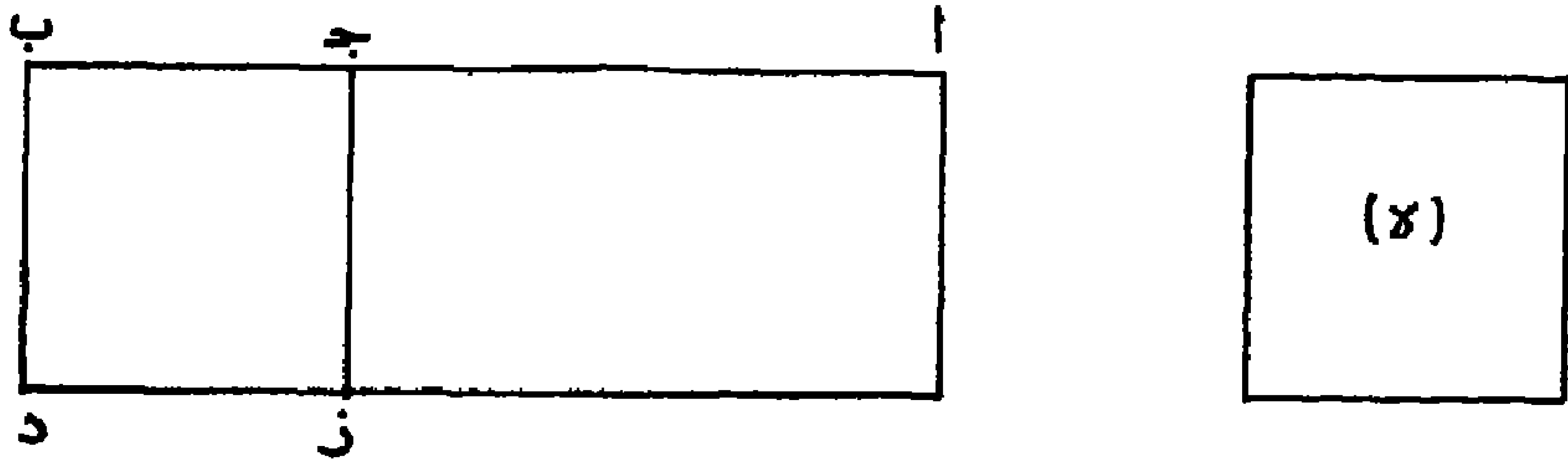


---

١ – للعدد: العدد – ب ، ل ، ن – // ٢ – عشرة : ١٥ – با – / عشرة : ١٥ – با – ٣ – يكون : تكون – ن – / الثالث : جـ – با – // ٤ – ففي: وفي – ك،ل – / خمسة : ٥ – با – / الثاني: ب – با – / نقسم : يقسم – ل – // ٥ – على ز :على زو – با – / الثالث : جـ – با – // ٧ – تبين: بين – ب – / ثانية: ب – با – // ٩ – الأجذار ... وينقص : ناقصة – ب – / ويُنقص : وتنقص – ك – / الثالث: جـ – با – // ١٠ – الثاني: ب – با – / مبلغ ا ز ويبقى: مبلغ او يبقى – ك،ل، با – يبلغ او يبقى – ب – يبلغ او تبقى – ن –

وإن شئت أمكنك البرهان عليه من وجوه أخرى ، ولكنا اقتصرنا على هذا مخافةَ التطويل . وأما إن فُرِض خط اب عشرةً مثلاً وأريد أن يُفصل منه خط ، يكون ضَرْب اب في ذلك الخط مساوياً لمربع ذلك الخط مع سطحٍ آخرَ غيرِ أعظمَ من مربع نصف اب ، أعني العدد المفروض وهو سطح ه ونريد أن نفصل من اب خطاً يكون / ٧ - ١ مربعه مع سطح ه مساوياً لضرب اب في ذلك الخط ، فنضيف إلى خط اب المعلوم سطحاً مساوياً لسطح ه المعلوم ينقص عن تمامه سطحاً مربعاً ، وهو ممكنٌ لأن سطح ه ليس بأعظمَ من مربع نصف اب ، وليكن سطحُ از والمربعُ الناقصُ سطحَ جد ، كما بيّنه أقليدس في سادسة الأَسْطِقِسّات فيكون ضلع جب معلوماً كما تبيّن في المعطيات . وذلك ما أردنا أن نبين .

فقد لاح أن لهذا الصنف أنواعاً ، ويقع فيها ما يستحيل . ويمكنك أن تعلم شرائط صحته في العدد على ما بيّناه في الصنف الأول .



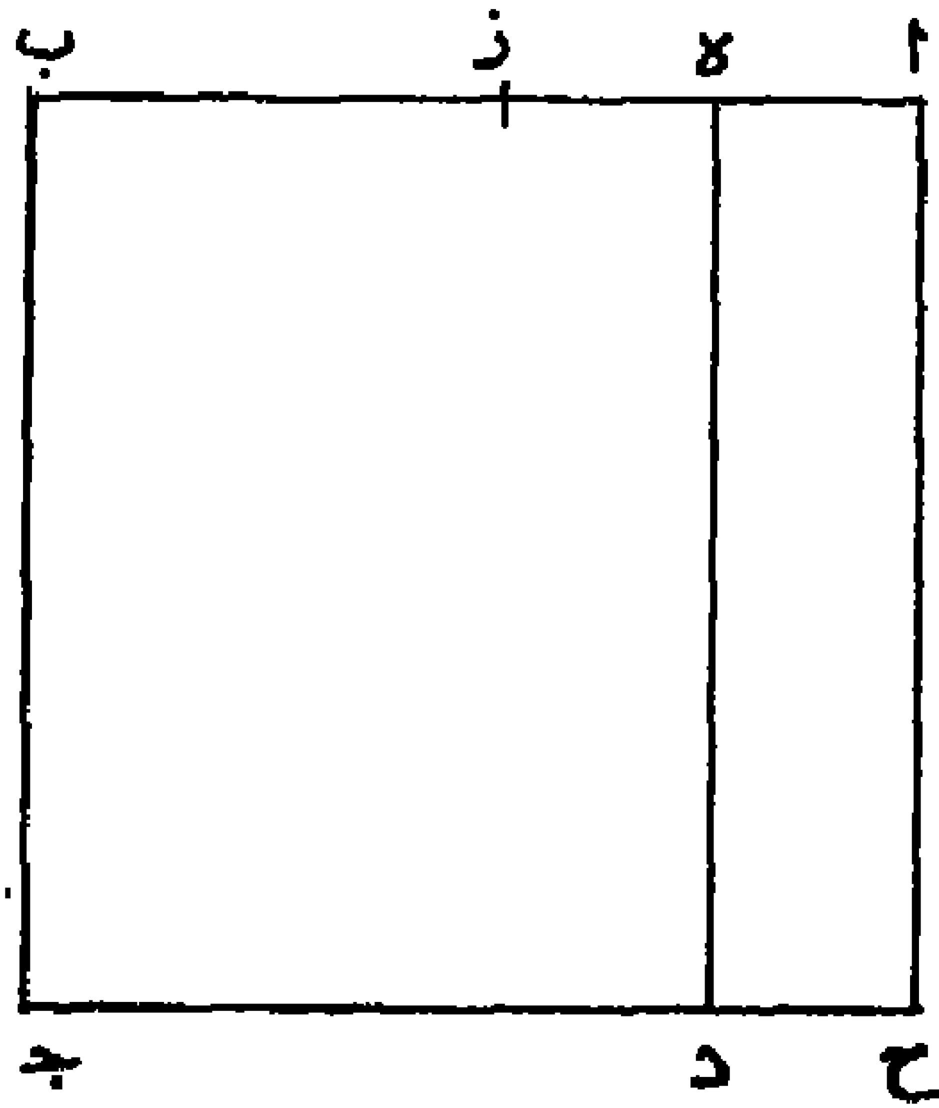
والصنف الثالث : عدد وجذر يعدل مالاً .

يُزاد مربع نصف <عدّة> الأجذار على العدد ، ويُؤخَذ جذر المبلغ ويُزاد على نصف <عدّة> الأجذار فما يحصل هو جذرُ المال .

---

٢ – عشرة : ١٥ – با – // ٣ – يفصل : نفصل – ن – / ضرب اب : ضرب ار – ل – // ٤ – نصف اب : اب – ب – / أعني : وعني – ك ، ل – // ٥ – نفصل : نفصل – ن – // ٦ – ه : ناقصة – ل – // ٩ – أقليدس : ناقصة – ك ، ل – ١٠ – سادسة : ٦ – با – / الاسطقسات : الاسطقس – ك ، ل – / تبين : بين – ك ، ل ، ن – ١٣ – تعلم : تعلم أن – ك، ل – // ١٥ – على العدد : مطموسة – ب – // ١٦ – فما : ناقصة – ك ، ل – / يحصل : حصل – با –

برهانه : مربع ا ب ج ح يعدل خمسة أجذاره وستةً من العدد ، فنفصل العدد منه وهو سطح ا د ، يبقى سطح ه ج عدةَ الأجذار ، وهو خمسةٌ ، فيكون خط ه ب خمسةً نقسمه بنصفين على ز ، فخط ه ب قُسم بنصفين على ز ونزيد فيه ه ا على استقامته ، يكون سطح ب ا في ا ه الذي هو سطحُ ا د المعلومُ مع مربع ه ز المعلومِ مثلَ مربع ز ا ، فمربع ز ا معلومٌ و ز ا معلومٌ و ز ب معلومٌ فيكون ا ب معلوماً . وله وجوه أخرى من البراهين فارتَضْ بها .

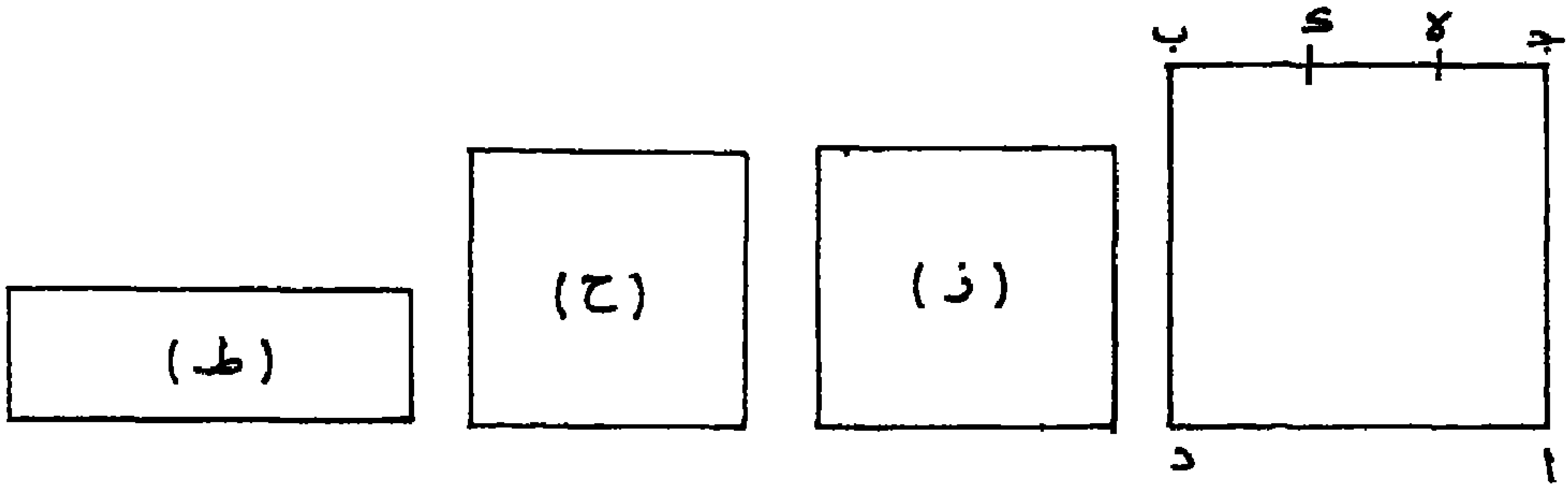


وأما إن فرض ه ب الذي هو عدةُ الأجذار ، وطلبُ المربع وضلعُه كي يكون مساوياً لعدة أضلاعه مع العدد المفروض < فيكون مربع ا ب ج د هو المطلوب > . فليكن العددُ المفروض سطحَ ط والمربعُ المساوي له ح ونعمل مربعاً مساوياً لمربع ح مع مربع ه ك الذي هو نصفُ عِدّةِ الأضلاع وليكن مربع ز . ونجعل ك ج مساوياً لضلع ز ونتمم مربع ا ب ج د ، فيكون مربع ا ب ج د هو المطلوب .

---

٢ – وهو : منه – ب – / ه ج : ه ح – ب ، با ، ن – / عدة : لهذه – ب ، با – بهذه – ن – // ٣ – نقسمه : يقسمه – ك ، ل – نقسم – با – كتبها بقى ثم صححها عليها – ب – ٤ – ونزيد : وزيد – ب ، با ، ن – / استقامته : استقامة – با – // ٥ – ب ا : ز ا – ك ، ل – / المعلوم : ناقصة – ك ، ل – // ٧ – معلوما : معلوم – ن – / فارتض : فارفض – ك ، ل – // ٨ – ه ب : ب ه – با – // ١٠ – ط : ناقصة – ك ، ل – ١١ – ونعمل : ويعمل – ك ، ل – / مع مربع : ناقصة – ك ، ل – / ه ك الذي : كالذي – ك ، ل – ١١ ، ١٢ – ه ك ... مربع ز : ناقصة – ب – / ز : و و – با ، د ، ل – / ونجعل : وجعل – ب – // ١٣ – ونتمم : ويتمم – ل ، ن – / هو : وهو – ك ، ل –

وتبيّن أن في هذا / الصنف الثالث : ليس شيءٌ يستحيل وكذلك في الأول ٧-ب وأما في الثاني ففيه ما يستحيل ، وله اختلافُ وقوعاتٍ وليس لهذين .



< معادلات الدرجة الثالثة التي تردّ إلى معادلات الدرجة الثانية >

وأما البرهان على أن الثلاثة الثانية من هذه الأصناف مناسبةٌ للثلاثة الأولى :

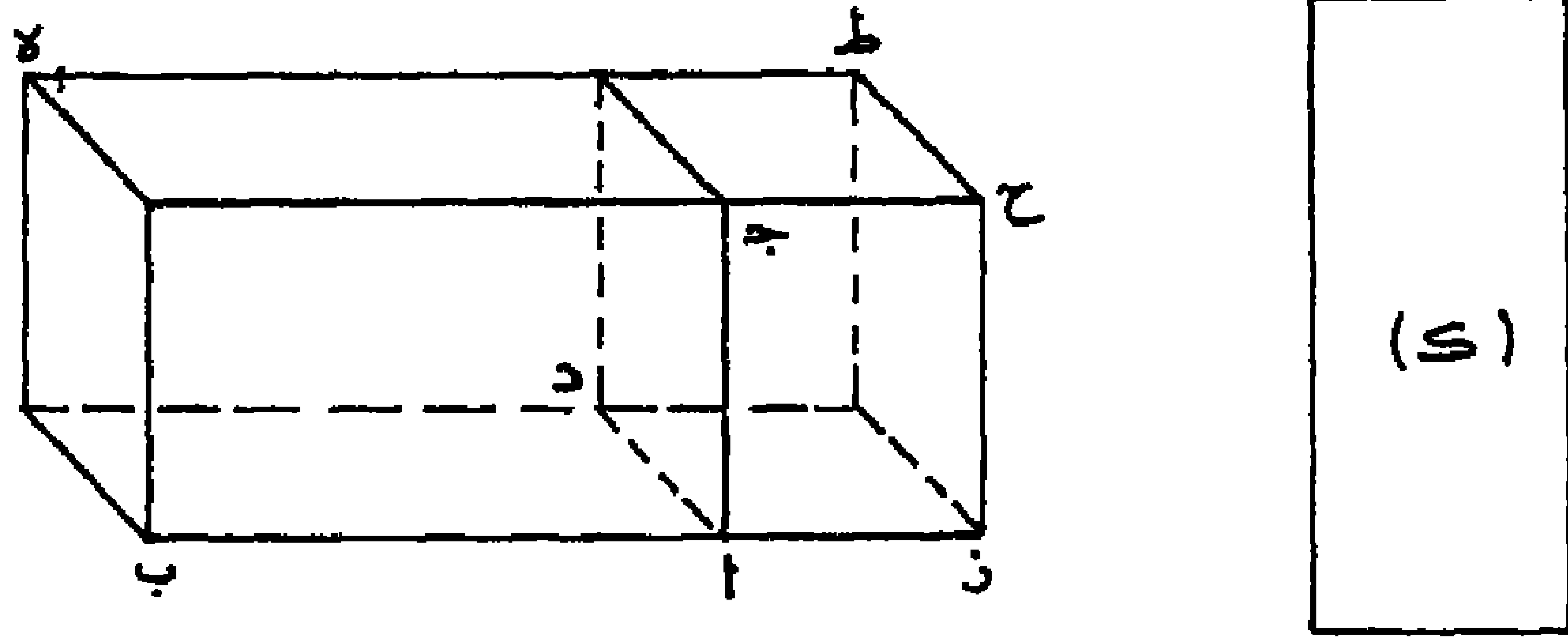
فالصنف الأول منها : مكعب وأموال يعدل جذراً .

نضع مكعبَ ا ب جـ د هـ ونخرج $\overline{\text{ا ب}}$ على استقامةٍ إلى $\overline{\text{ز}}$ ونجعل $\overline{\text{ا ز}}$ مثلَ عدة الأموال ونتمم مجسّم $\overline{\text{ا ز ح ط جـ د}}$ على استقامة مكعب $\overline{\text{ا هـ}}$ على ما جرت به العادة ، فمجسّم $\overline{\text{ا ط}}$ مثلُ عدة الأموال ، فيكون مجسّمُ $\overline{\text{ب ط}}$ الذي هو المكعبُ وعدةُ الأموالِ المفروضة كعدة الأجذار المفروضة . ونعمل سطح $\overline{\text{ك}}$ لعدّة الأجذار المفروضة ، والجذر هو ضلعُ الكعب وهو $\overline{\text{ا د}}$ ، فسطح $\overline{\text{ك}}$ إذا ضُرب في $\overline{\text{ا د}}$ يكون مثل عدّة

---

١ – وتبين : ونبين – ن – / أن : ناقصة – ل – / يستحيل : مستحيل – با – / وكذلك : ناقصة – ب ، با – كذى – ك – كذا – ل – // ٤ – الثانية : ب – يا – // ٦ – فالصنف : بالصنف – ل – / منها : منه – ك ، ل ، با ، ن – / جذرا : عددا – ب ، با ، ن – ٧ – نضع : يضع – ل ، ن – / ونخرج : ويخرج – ل – / على استقامة إلى $\overline{\text{ز}}$: ناقصة – ب – ٨ – ونتمم : ويتمم – ن – / $\overline{\text{ا ز ح ط جـ د}}$: $\overline{\text{ا ز ح ط جـ}}$ – ك ، ل – // ١١ – سطح : فسطح – ك – ناقصة – ل – / لعدة : كعدة – با – // ١١، ١٢ – والجذر ... $\overline{\text{ا د}}$: ونعمل – ب – // ١٢ – فسطح : سطح – ب – أولها مطموس – با – / إذا : إذ – ب –

الأضلاع المفروضة ، وسطحُ ح ب إذا ضُرب في ا د يكون منه المكعبُ مع عدة أموال المفروضة ، وهما متساويان ، أعني مجسّم ب ط والمجسّم المعمول على كَ الذي ارتفاعه ا د ، فقاعدتاهما تكونان مكافئتين لارتفاعيهما ، وارتفاعاهما متساويان ، فقاعدتاهما تكونان إذاً متساويتين وقاعدة ح ب هو مربعُ جـ ب مع ح ا الذي هو عِدّةُ أجذاره التي فرضت للأموال ، فيكون كَ الذي هو العدد المفروض للأجذار مثلَ مالٍ وعدّةِ الأجذار المفروضة للأموال ، وذلك ما أردنا أن نبيّن .



ومثاله : مكعب وثلاثة أموال يعدل عشرة أجذار فيكون مالٌ وثلاثةُ أجذارٍ يعدل عشرة أعداد .

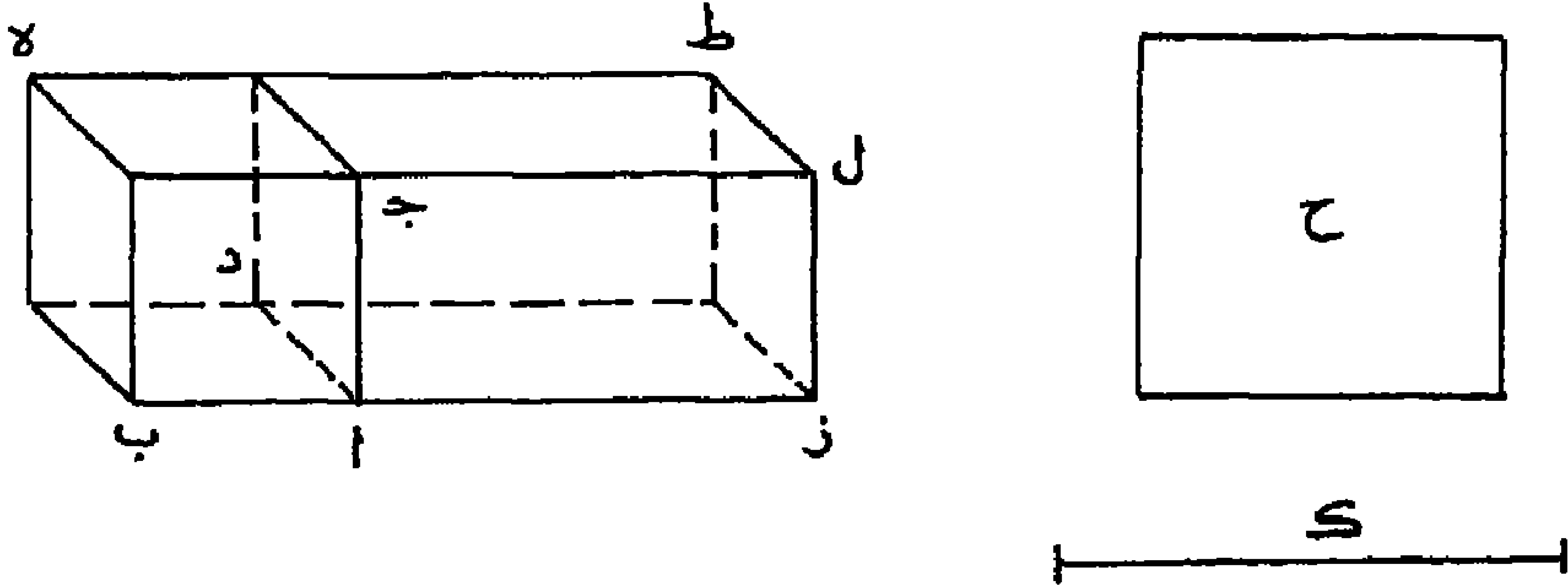
والصنف الثاني منها : مكعب مع جذرين يعدل ثلاثة أموال . فيكون مالا / مع اثنين يعدل ثلاثة أجذار . ٨-أ

برهانه : نضع مكعبَ ا ب جـ د هـ وهو مع جذريه يعدل ثلاثة

---

١ – ح ب : جـ ب – ك ، ل – // ١ ، ٢ – وسطح... المفروضة : ناقصة – ب – // ٣ – المعمول : المعلوم – ن – / تكونان : يكونان – ك ، ل ، ب – / مكافئتين : متكافئين – ك ، ل – ٤ – تكونان : ناقصة – ك ، ل – يكون – ن – / إذاً : إذن – ب ، با – / متساويتين : متساويان – ك ، ل ، ن – // ٥ – ح ب : جـ ب – ك ، ل – / جـ ب : ح ب – ن – / ح ا : جـ ا – ك ، ل – ح – ب – // ٧ – أن نبين : ناقصة – با – أن نتبين – ب – ٨ – ومثاله : والصنف الثاني منها – ب – / يعدل : تعدل – ك ، ل – / فيكون : يكون – ك ، ل ، ب ، با ، ن – / مال : كتبها مالا ثم صححها عليها – ب – // ٩ – يعدل : تعدل – ك ، ل – // ١٠ – منها : ناقصة – ك ، ل – / فيكون : يكون – ك ، ل ، ب ، با ، ن –

أموال ، ونضع حَ مربعاً مثلَ جَب ، ونضع كَ ثلاثةً ، فيكون ضرْب حَ في كَ ثلاثةَ أموالٍ <جذر> مكعبِ اه ، ونعمل على اجَ سطحاً مساوياً لاثنين ، ونتمم مجسّم ازجطد فيكون مثلَ عـــدة الجذور ، ولكن خــط زبَ إذا ضُرب في مربـعِ اجَ حصــل مجسّم بطَ ، ومجسّم اطَ مثلُ عـــدّة الأضلاع ، فمجسّم بطَ مثلُ المكعب مع مثلِ عـــدة أضلاعه ، فيكون مجسّم بطَ مساوياً لعدّة الأمـــوال ، فيكون خط زبَ على ما تبين في الشكل المتقدم ثلاثةً ، وسطحُ بلَ هو مالٌ واثنان ، فمال واثنان يعدل ثلاثة أجذار ، لأن سطح بلَ هو من ضرب ابَ في ثلاثة ، وذلك ما أردنا أن نبيّن .

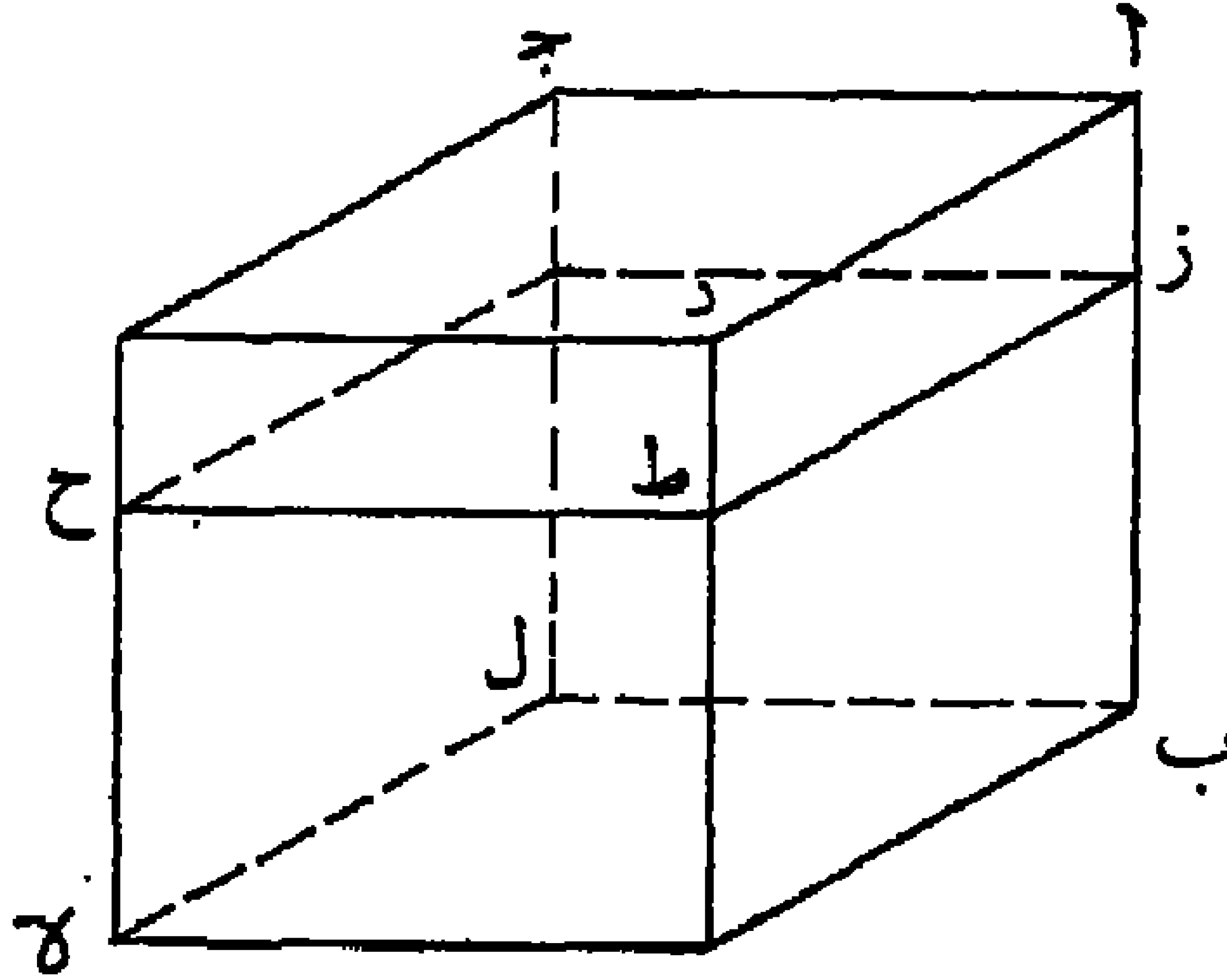


والصنف الثالث منها : مكعب يعدل مالاً وثلاثة أجذار ، فيكون مالاً يعدل جذراً وثلاثةَ أعداد .

---

٣ – ونتمم : ونتّم – ك ، ل ، ب – / لاثنين : للاثنين – با – / ازجطد : ابجطد – با – // ٤ – زب : دا – ك ، ل – // ٥ – اط : اد – ك ، ل – / مع : ناقصة – ك ، ل ، ن – // ٧ – تبين : بيّن – ن – / المتقدم : المقدم – ك ، ل – / بل : آ – ك ، ل – آل – ب ، با – اب – ن – // ٨ – بل : دل – ب – د – با – ٩ – ثلاثة : فوق السطر – ك – / نبين : يتبين – ب – // ١٠ – منها : منها هو – ن – / ثلا ثة : علم الناسخ عليها في ك وكتب في الهامش « مالان » مع الإشارة إلى أن هذا خطأ ، فكتبها هكذا « مالان خ » . وهذا يعني أنه قد وجد في النسخة التي نقل عنها إما العبارة نفسها في الهامش وإما الكلمة في النص فصححها . والثابت أن العبارة في الأصل كانت « مكعب يعدل مالين وثلا ثة أجذار » كما ستبينه كلمة جذران فيما بعد . والدليل على أن ناسخ « ل » قد اعتمد على نسخة ك أننا نجد في ل « مكعب يعدلا مالا وثلا ثة مالان أجذار » فهذه العبارة المضطربة لايمكن فهم أصلها إلا إذا اعتبرنا أن ناسخ « ل » قد أدخل ما في هامش « ك » في النص . / أجذار : أجذاره – ب – فيكون مالا : فيكون مال – ك ، ل ، ب – / جذرا : جذران – ك ، ل –

< برهانه > نضع مكعب ا ب جـ د هـ الذي يعدل مالاً وثلاثةَ أضلاعِه ، ونفصل من خط ا ب الذي هو ضلعه خطّاً ا ز مثلَ عدّةِ الأموال ، وهو واحد ، ونتمم مجسّم ا ز ط ح جـ فيكون مجسّم ا ز ح ط جـ مثلَ عدة الأموال المفروضة ، فيبقى مجسّم ز هـ مساوياً لعدة الأضلاع المفروضة . ونسبةُ المجسّمين أحدُهما إلى الآخر كنسبة قاعدة ز جـ إلى قاعدة ز ل كما تبين في الحادية عشرة من الأصول إذ الارتفاعان متساويان ، ولكن سطح ز جـ هو جذرٌ واحد / ٨-ب لمربع جـ ب وسطحُ ز ل هو عدةُ الأجذار وهو ثلاثةٌ ، فمربع جـ ب مثل جذرٍ واحد وثلاثةِ أعداد ، وذلك ما أردنا أن نبيّن .



وهذه البراهينُ ما لم تُفهم على هذا النمطِ لا تكون الصناعةُ حِكميّة ، وإن كان فيها تجشمُ مصاعبَ .

---

١ – مكعب : كتبها مكعبا ثم صححها عليها – ب – / مالا : ماله – ك ، ل ، ب ، با ، ن – ٢ – أضلاعه : كتبها أضلاع ثم صححها عليها – ل – // ٣ – ونتمم : ونتم – ب – ويتم – ل – ونتم – ك – / ا ز ط ح جـ : ا ز ط ح د – ك ، ل ، ب ، با ، ن – ٤ ، ٥ – فيبقى ... المفروضة : ناقصة – ك ، ل – // ٦ – ز جـ إلى قاعدة : ناقصة – ك ، ل – / الحادية عشر : يا – با – ك ، ل ، ن : الحادية عشر – // ٧ – الارتفاعان : كتبها في ل الارتفاع ثم صححها عليها – / ز جـ : ب جـ – ب ، با – / واحد : ناقصة – ن – / هو جذر واحد : بين جذر بواحد – ك ، ل – // ٨ – ز ل : ب ل – با – / عدة : عدد – ك ، ل ، ن – / فمربع : المربع – ك ، ل – // ٩ – أن نبين : ناقصة – ك ، ل – ١٠ – تفهم : يفهم – ك ، ل ، ن – / تكون : يكون – ب ، ل ، ن – / حكمية : حكمته – ك ، ل ، ن – // ١١ – تجشم : لجسم – ك ، ل – تجسم – ب ، ن –

< معادلات الدرجة الثالثة المركبة من ثلاثة حدود >

ومن بعد تقديم هـــذه الأصناف التي أمكن البرهانُ عليها مـــن خواص الدائرة ، أعني من كتاب أُقليدسَ ، فلنقل الآن على الأصناف التي لا يُمكن البرهانُ عليها إلا بخــواص القُـطوع ، وهي أربعــةَ عشرَ صنفاً ، واحدٌ مفردٌ وهو عددٌ يعدل مكعباً ، وســتةٌ ثلاثيةٌ باقيةٌ وسبعةٌ رباعيةٌ .

ولنقدّم مقدمات مبنيةً على كتاب المخروطات ليكون شـــبهَ تمهيــد للمتعلم ، ولا تكون رسالتنا هـــذه مفتقرةً إلى أكثرَ من الثلاثة الكتبِ المذكورة ، أعني كتابي أُقليِدسَ في الأصول وفي المعطيات ومقالتين من كتاب المخروطات .

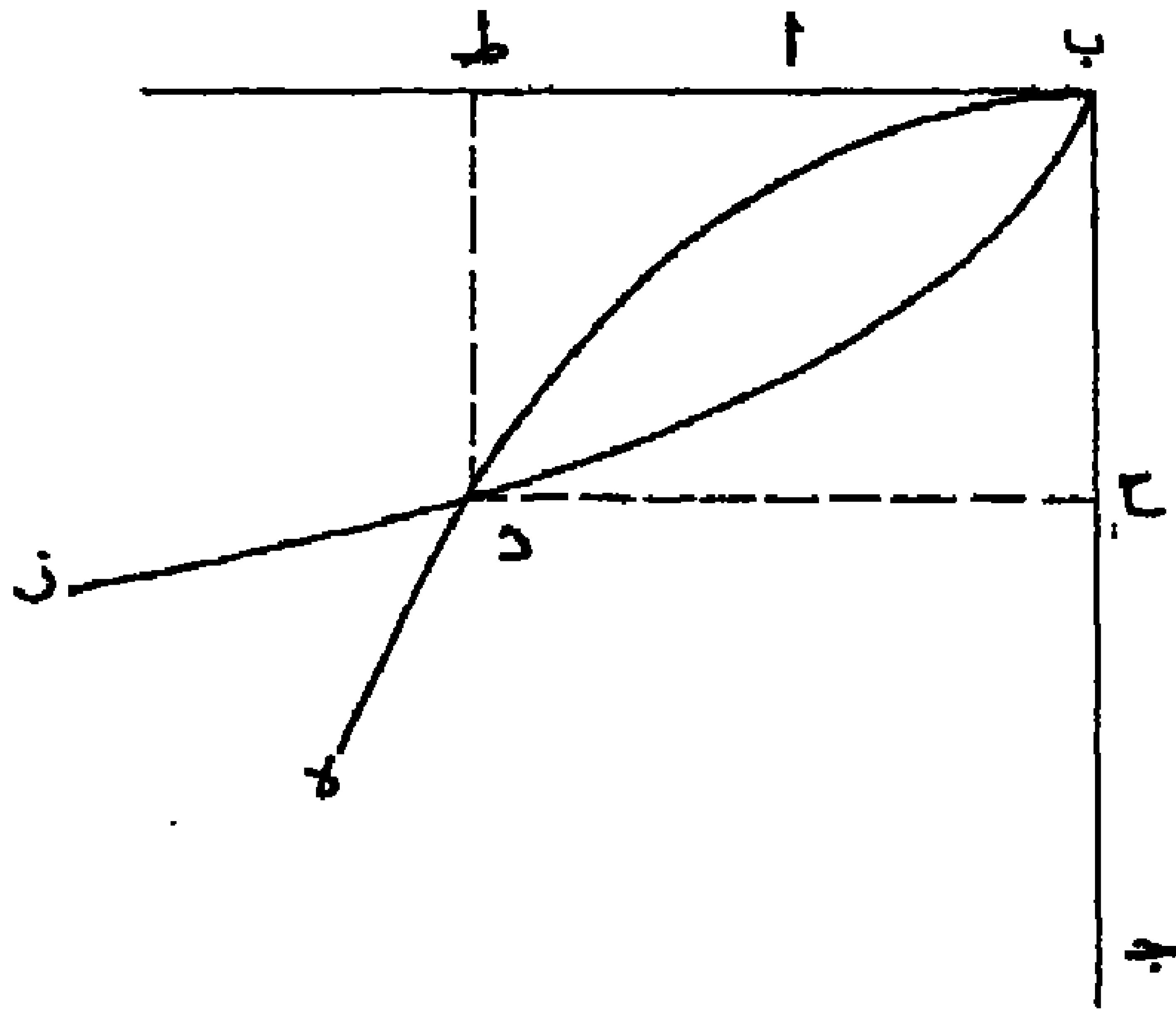
< مقدمة ١ > نريد أن نجد خطّين بين خطين ليتوالى الأربعةُ متناسبةً .

فليكن الخطان المستقيمان اب بجـ ، ونجعلهما محيطين بزاويــة بَ القائمة ، ونعمل قطعاً مكافئاً رأسُه نقطةُ بَ وسهمُه بجـ وضلعهُ القائمُ بجـ وهـــو قطعُ ب د هـ ، فيكون قطع ب د هـ معلومَ الوضـــع لأن رأسَه وسهمَه معلوما الوضع وضلعَه القائم معلومُ القدر ، ويكون مماساً لخط با لأن زاوية بَ قائمةٌ وهي مساويةٌ لزاوية الترتيب كما تبين في شكل لجـ من مقالة آ من المخروطات . وكذلك نعمل قطعـــاً

---

٢ — البرهان : البراهين — ك، ل — // ٣ — الآن : ناقصة — ب، با ، ن — // ٤ — البرهان : البراهين — ل — // ٤ ، ٥ — أربعة عشر : ١٤ — با — / واحد منفرد : ناقصة — با — / ستة : ٦ — با — // ٦ — سبعة : ٧ — با — // ٨ — هذه : ناقصة — با — // ٩ — كتابي : كتاب — ك ، ل — // ١٢ — اب : اد — ل — / بجـ : د جـ — ل، ب — / محيطين : مختطين — ل — // ١٣ — القائمة : القائم — ك ، ل — // ١٤ — بجـ : ب ح — ك ، ل — كتبها ب ح ثم صحح الحاء عليها — ب — / ب د هـ : ب د — ك، ل — // ١٥ — لأن ...الوضع : ناقصة — ب — // ١٦ — ب ا : ب ل — با — // ١٧ — لجـ : يجـ — ب ، با —

آخرَ مكافئاً رأسُه نقطةُ بَ وسهمُه اَبَ وضلعُه القائم اَبَ وهو قطعُ ب د زَ مماساً لخط ب جَ كما بيّنه أبلونيوسُ في شكل نوَ من مقالة آ . ويكون / قطع ب د زَ مماسّاً لخط ب جَ . فهما يتقاطعان باضطرارٍ ، فليتقاطعا على نقطة دَ ، فنقطة دَ معلومةُ الوضع لأن القطعين معلوما الوضع ، ونُخرج منها عمودين دحَ دطَ على اب ب جَ فيكونان معلومي القدر ، كما تبين في المعطيات . فأقول إن خطوط اب ب ح ب ط ب جَ الأربعةَ متناسبةٌ . ٩-١



برهانه : إن مربع ح دَ مساوٍ لضرْب ب حَ في ب جَ لأن خطَّ د حَ من خطوط الترتيب في قطْع ب د هَ ، فتكون نسبةُ ب جَ إلى ح دَ المساوي لخط ب طَ كنسبة ب طَ إلى ح بَ . وخطُّ د طَ من خطوط الترتيب في قطْع ب د زَ ، فيكون مربع د طَ الذي هو مثل ب حَ مساوياً لضرب ب اَ في ب طَ . فنسبة ب طَ إلى ب حَ كنسبة

١ – اَبَ (الأولى) : ناقصة – ب – // ٢ – ب جَ : ب حَ – ك ، ل – / مماسا لخط ب جَ : ناقصة – با – // ٣ – آ : وَ – ك ، ل – / ويكون : يكون – ك ، ل – / يكون... ب جَ : كتبها في الهامش – ك – / ب جَ : ب حَ – ك ، ل – / يتقاطعان : مقاطعان – ب – ٦ – تبين : بين – ب ، با – / خطوط : خط – ك ، ل – // ٧ – ب جَ : ب حَ – ب – ٨ – ح د : كتبها ح د ثم صحح الجيم عليها – ل – / ب حَ : الباء مطموسة – ب – // ٩ – فتكون : فيكون – ل ، ن – // ١٠ – ح د : ح د – ل – // ٩، ١٠ – ب ح ... المساوى : مطموسة – ب – / ب طَ : مطموسة – ب – // ١١ – في قطع ... د ط : مطموسة – ب – / فيكون : يكون – ب ، با ، ك ، ل ، ن – // ١٢ – مساويا : مساو – با – / فنسبة ب طَ : ناقصة – ب –

ب ح إلى ب ا . فالخطوطُ الأربعةُ متناسبةٌ متواليةٌ وخطُ د ح معلومُ القدر ، لأنه خرج من نقطة معلومةِ الوضع إلى خطٍ معلوم الوضع على زاوية معلومة القـــدر ، وكذلك د ط معلومُ القدر . فخطا ب ح ب ط معلوما القدر وهما وسطان في النسبة بـين خطي ا ب ب ج ، أعني نســـبة ا ب إلى ب ح كنسبة ب ح إلى ب ط وكنسبة ب ط إلى ب ج ، وذلك ما أردنا أن نبيّن .

< مقدمة ٢ > مربع ا ب ج د مفروض ، وهو قاعدة مجسّم ا ب ج د ه المتوازي السطوحِ القائمةِ الزوايا ، ومربع م ح مفروض ، ونريد أن نعمل على قاعـــدة م ح مجسّماً متوازيَ السطوح قائمَ الزوايا مساوياً لمجسم ا ب ج د ه المفروض .

فنجعل نسبة ا ب إلى م ز كنسبة م ز إلى ك ، ثم نجعـــل نسبة ا ب إلى ك كنسبة ز ط إلى ه د ونجعل ز ط عموداً على سطح م ح على نقطة ز ونتمم مجسّم م ز ط ح

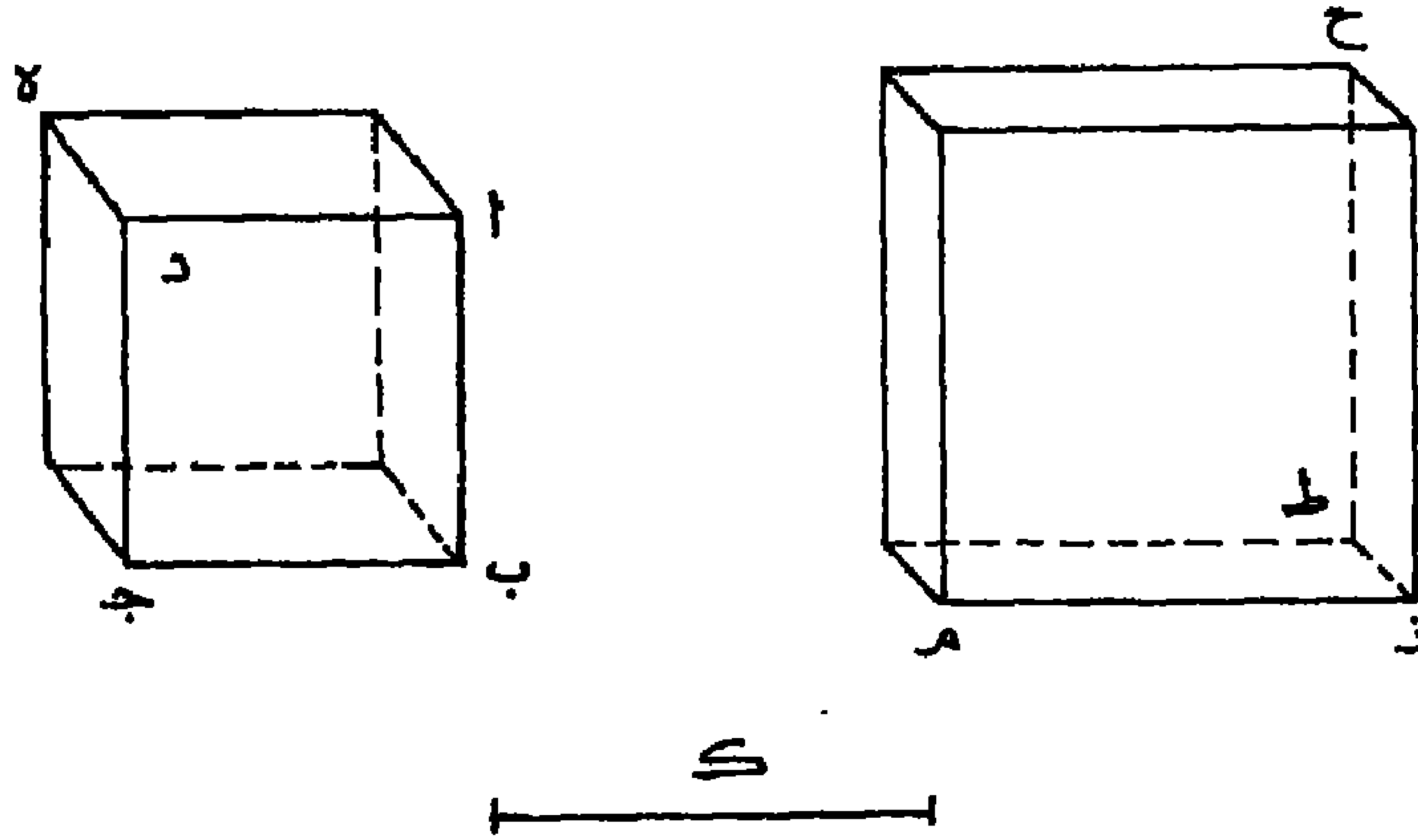
فأقول إن هذا المجسّم مساوٍ للمجسّم / المفروض . ٩-ب

برهانه : نســـبة مربع ا ج إلى مربع م ح كنسبة ا ب إلى ك ، فيكون نسبة مربع ا ج إلى مربع م ح كنسبة ز ط الذي هو ارتفاع مجسّم

---

١ – ب ح ... فالخطوط : مطموسة – ب – / فالخطوط : الخطوط – ك ، ل – / وخط د ح : مطموسة – ب – / د ح : ج ح – با ، ن – // ٢ – خرج ... إلى : مطموسة – ب – ٣ – معلومة القدر : مطموسة – ب – // ٤ – وسطان : موسطان – ك ، ن – متوسطان – ل – // ٥ – ب ج : ب ح – ك ، ل ، ن – // ٧ – ا ب ج د : ا ب ج – ك ، ل – / ا ب ج د ه : ا ب ج د – ب – // ٨ – م ح : ه ز ح – ك ، ل – // ٩ – م ح : ه ز ح – ك ، ل – // ١٠ – ا ب ج د ه : ا ب ج د – ك ، ل – // ١١ – م ز : ه ز – ك ، ل – / م ز (الثانية) : ه ز – ك ، ل – // ١٢ – م ح : م ز ح – ك ، ل – ١٣ – ونتمم : ونتم – ك ، ل – / م ز ط ح : ه ز ح – ك ، ل – // ١٥ – م ح : ه ز ح – ك ، ل – // ١٦ – م ح : ه ز ح – ك ، ل – كتب ناسخ ك في الهامش « مزح خ » ويعني أن مزح خطأ ، وربما وجدها هكذا في الأصل فصححها والمهم أن نلاحظ أن هذه العبارة قد نقلها ناسخ ل في الهامش أيضا . / ارتفاع مجسم : ارتفاعه – ك ، ل –

م ط ح إلى د ه الذي هو ارتفاع مجسّم ب ه ، فيكون المجسمان متساويين ، لأن قواعدهما مكافئة لارتفاعيهما كما تبين في مقالة يا من الأصول .



وكلما قلنا "مجسّم" فإنا نعني به المجسّم المتوازيَ السطوح القائمَ الزوايا ، وكذلك كلما قلنا سطح فإنا نعني به السطح المتوازيَ الأضلاع القائمَ الزوايا .

< مقدمة ٣ >

مجسم ا ب جـ د مفروض وقاعدته ا جـ مربعة ونريد أن نعمل مجسّماً قاعدته مربعة وارتفاعه مثل ه ط المفروض ويكون مساوياً لمجسّم ا ب جـ د .

فنجعل نسبة ه ط إلى ب د كنسبة ا ب إلى ك ونأخذ بين ا ب و ك خطاً وسطاً في النسبة وهو ه ز ، ونجعل ه ز عموداً على ه ط

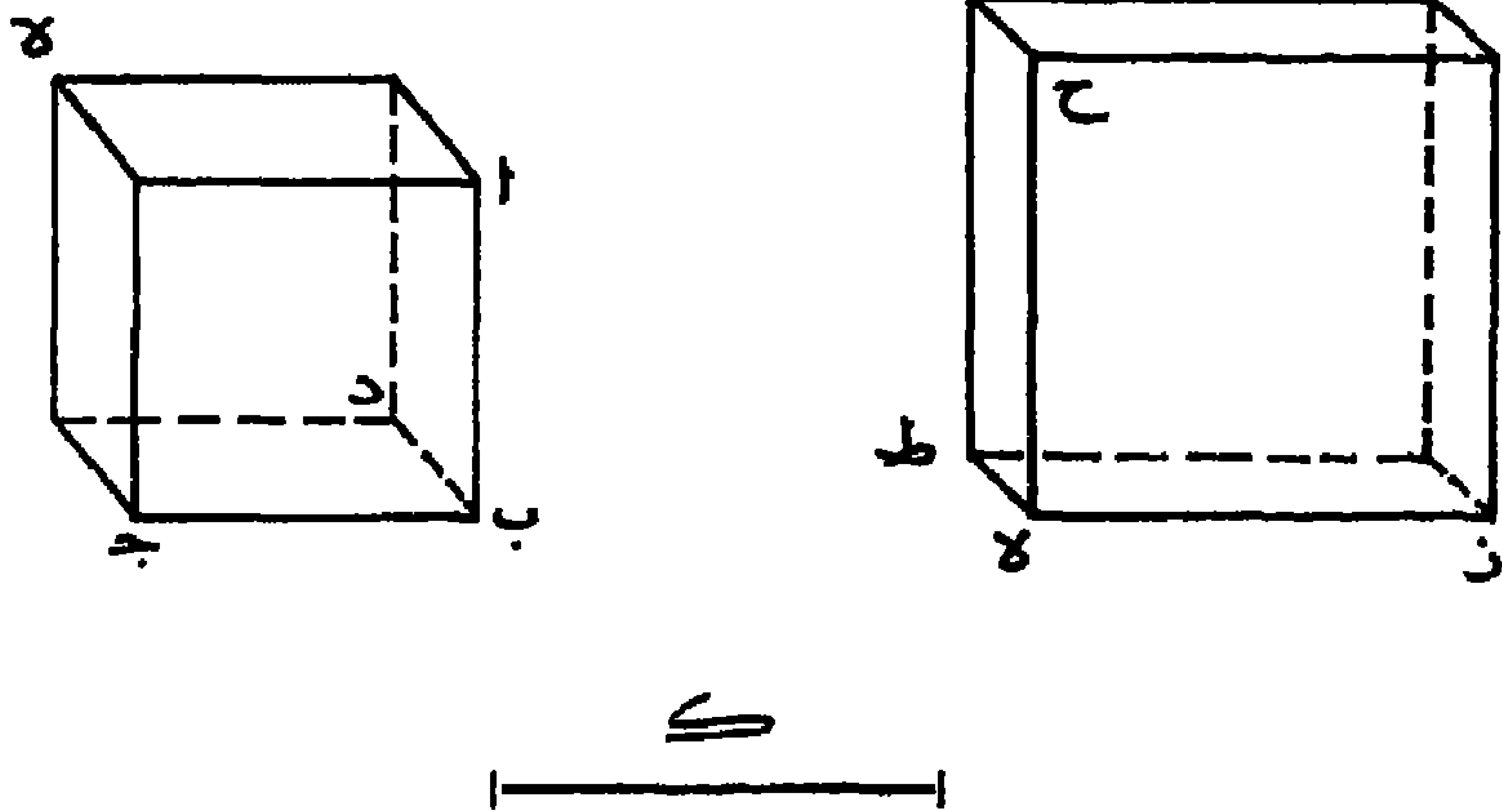
---

١ – م طح : ه ز طح – ك ، ل – / متساويين : متساويان – ب،ك،ل – // ٢ – مكافئة : متكافئة – ك ، ل – / الرسم ناقص في ب – // ٣ – مجسم : فوق السطر – ك – ٧ – مفروض : ناقصة – ك ، ل – / مربعة – كتبها مربع ثم صححها عليها – ب – فربعه – ن – / ٨ – مربعه : مربع – ب ،با ،ن – / ويكون : يكون – ب – // ٩ – اب جـ د : ا جـ د – ب ، ك ، ل ، ن – // ١٠ – ك : طك – ك ، ل – // ١١ – وسطا : موسطا – ك ، ل – / ه ز (الأولى والثانية) : ه د – ل –

ونتممّ مجسّم ط ز ونجعل ح ه عموداً على سطح ط ز ويكون مثل ز ه ونتممّ مجسّم ح ه ط ز .

فأقول : إن مجسم ط الذي قاعدته مربع ح ز وارتفاعه ه ط المفروض مثل مجسّم د المفروض .

برهانه : إن نسبة مربع ا ج إلى مربع ح ز كنسبة ا ب إلى ك ، فيكون نسبة مربع ا ج إلى مربع ح ز كنسبة ه ط إلى ب د . فقاعدتا المجسّميْن مكافئتان لارتفاعيهما ، فهمـا متساويان ، وذلك ما أردنا أن نبيّن .



ومن بعد ذلك فإنا نأتي بالصنف الثالث من المفردات وهو كعب يعدل عدداً . / ١٠ - ا

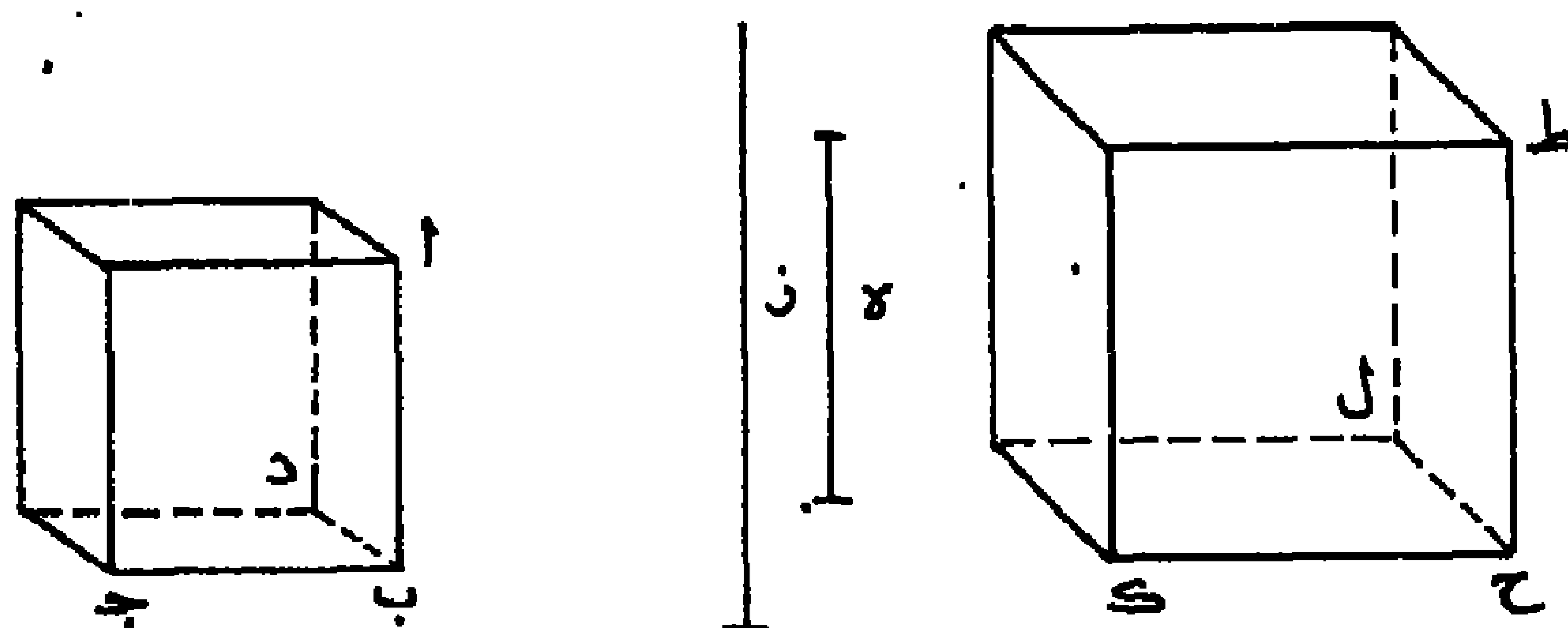
---

١ – مجسم : ناقصة – با ، ن – / ط ز : ط د – ل – / ونتمم ... ط ز : ناقصة ونجد « ونجعل ه ز عمودا على ه ط ويكون مثل ه ز » والعبارة مكررة – ب – / ط ز : ط ب – با – ط د – ل – / ز ه : ا ز ه – ن – // ٢ – ونتمم : ونتم – ك ، ل ، ب – / ح ه ط ز : الزاي فوق السطر في ك ، ح ط ز – ل – // ٣ – ح ز : ج ز – ب – ح د – ل – ٦ – ح ز : ح د – ك ، ل – // ٧ – مكافئتان : متكافئتان – ك ، ل – // ٨ – الرسم ناقص في ب – // ٩ – فإنا : فأني – ك ، ل – كتبها أولا فإني ثم صححها عليها – با – / نأتي : يأتي – ك ، ل – // ١٠ – عددا : عدد – ك ، ل –

نضع العدد مجسَّمَ اب جد وقاعدتَه اج وهو مربع الواحد كما قلنا وارتفاعه مثل العدد المفروض ؛ ونريد أن نعمل مكعباً مساوياً له . فنأخذ بين خطي اب ب د خطين وسطين في النسبة فيكونان معلومي القدر كما بيّناه ، وهما هـ ز ؛ ونجعل ح ط مساوياً لخط هـ ونعمل عليه مكعبَ ط ح ك ل فيكون هذا المكعب معلوم القدر ، وضلعه معلوم القدر .

فأقول إنه مساوٍ لمجسم د

برهانه : نسبةَ مربع اج إلى مربع ط ك كنسبة اب إلى ح ك مثناةً ، ونسبة اب إلى ح ك مثناةً كنسبة اب إلى ز ، الأول إلى الثالث من الخطوط الأربعة ، بل كنسبة ح ك الثاني إلى ب د الرابع . فقاعدتا مكعب ل ومجسم د مكافئتان لارتفاعيهما ؛ فهما متساويان ، وذلك ما أردنا أن نبيّن .



١ – مجسم : مجسما – ك ، ل – // ٢ – وارتفاعه : وطوله – ك ، ل ، ب ، با ، ن – ٣ – ب د : مجـ – با – // ٤ – بيناه : بينا – ك ، ل – / :هـ ز د هـ – ل – // ٥ – هذا المكعب : مطموسة في ب – // ٨ – كنسبة ... : النص من هنا إلى آخره مطموس – ب – ٩ – ونسبة : مكررة – ل – / ز : د – ل – // ٩ ، ١٠ – كنسبة ... الثالث : كنسبة اب الأول إلى ز الثالث – ن – / كنسبة : كنسبة الأول – با – / ح ك : حـك – با – ١٢ – أن نبين : بيانه – ك ، ل –

ومن بعد ذلك فإنا نشتغل بالأصناف الستة الباقية الثلاثية .

الصنف الأول هو : مكعب وأضلاع يعدل عدداً

نضع اب ضلع مربع مساوٍ لعدة الجذور وهو مفروض ، ونعمل مجسماً يكون قاعدته مثل مربع اب ويكون ارتفاعه مثل ب ج ويكون مساوياً للعدد المفروض كما بينّا عمله فيما تقدم ، ونجعل ب ج عموداً على اب . وقد علمت ما معنى العدد المجسم في كلامنا ، وهو مجسم يكون قاعدته مربع الواحد ، وارتفاعه مثل العدد المفروض ، أعني خطاً نسبته إلى ضلع قاعدة المجسم كنسبة العدد المفروض إلى الواحد . ونخرج اب على استقامةٍ إلى ز ونعمل قطْعاً مكافئاً رأسُه نقطة ب وسهمه ب ز وضلعه القائم اب وهو قطْع ح ب د فيكون / ١٠-ب قطع ح ب د معلوم الوضع كما بينّا آنفاً ويكون مماساً لخط ب ج ، ونعمل على ب ج نصف دائرة ، فإنها باضطرارٍ تقطع القطع ، فلتقطعه على د ، ونخرج من د — التي هي معلومة الوضع كما عرفته — عمودي د ز د ه على ب ز ب ج ، فيكونان معلومي الوضع والقدر ، فخط د ز من خطوط الترتيب في القطْع فيكون مربعه مساوياً لضرْب ب ز في اب ، فيكون نسبة اب إلى د ز الذي هو مثل ب ه كنسبة ب ه إلى ه د الذي هو مثل ز ب ، لكن نسبة ب ه إلى ه د كنسبة ه د إلى ه ج ، فالخطوط الأربعة متناسبة : اب ب ه ه د ه ج ،

---

١ — ناقص — ب — // ٢ — هو : وهو — ل — / عددا : أعدادا — ك ، ل ، ن ، ب — ٤ — مجسما : مجسم — ب — / اب : مطموسة — ب — // ٥ — ويكون : الواو مطموسة — ب — / ب ج : ب ح — ك ، ل — / للعدد : كتبها العمل ثم صححها عليها — ل — / ب ج : مطموسة — ب — // ٧ — وارتفاعه : مطموسة — ب — // ٨ — أعني ... المفروض : ناقصة — ب — / المفروض : المفروط — ل — // ٩ — ز : أضاف واو نعمل إليها فكتبها زو — ك ، ل — ١١ — ب ج : ب ح — با — // ١٢ — باضطرار : اضطرارا — ك ، ل — / تقطع : يقطع — ل ، ن — / فلتقطعه : فليقطعه — ل ، ن — // ١٤ — د ه : مطموسة — ب — / ب ج : ب ح — ك ، ل — // ١٨ — ب ه : مطموسة — ب — / ه ج : مطموسة — ب —

فنسبة مربع اب الأول إلى مربع به الثاني كنسبة به الثاني إلى هج الرابع ، فالمجسم الذي قاعدته مربع اب وارتفاعه هج مساوٍ لمكعب به لأن ارتفاعيهما مكافئان لقاعدتيهما . ونجعل المجسم الذي قاعدته مربع اب وارتفاعه هب مشتركاً . فيكون مكعب به مع هذا المجسم مثل المجسم الذي قاعدته مربع اب وارتفاعه بج الذي فرضناه مساوياً للعدد المفروض . لكن المجسّم — الذي قاعدته مربع اب الذي هو مثل عدة الجذور وارتفاعه هب الذي هو ضلع المكعب — مساوٍ لعدة أضلاعِ مكعبِ هب المفروضة ، فمكعب هب مع عدة أضلاعه* المفروضة مساوٍ للعدد المفروض وذلك المراد . وليس لهذا الصنف اختلاف وقوعٍ ولا يستحيل من مسائله شيء ، وقد خرج بخواص الدائرة مع خواص القِطْع المكافيء .

١ — الأول : الأولى : ب ، با — // ٣ — لقاعدتيهما : أولها مطموس — ب — // ٥ — مثل المجسم : ناقصة — ك ، ل — // ٦ — للعدد المفروض : مطموسة — ب — / قاعدته : قاعدته مع — ن — // ٧ — هب : ب — ك ، ل — // ٨ — هب : كتبها ناسخ ك « به » ثم حذفها وكتب هب ولقد جمع ناسخ ل الاثنتين فنجد به هب — // * هنا تنتهى مخطوطة « ب » بدون رسم الشكل .

الصنف الثاني من الأصناف الستة الثلاثية هو : مكعب وعدد يعدل أضلاعاً .

١١-١ فنفرض اب ضلعَ مربع مساوٍ لعدة / الجذور ونعمل مجسماً يكون قاعدته مربعَ اب ويكون مساوياً للعدد المفروض ، وليكن ارتفاعه ب ج وهو عمود على اب . ونعمل قِطْعاً مكافئاً رأسه نقطة ب وسهمه على استقامه اب وضلعه القائم اب وهو د ب ه ويكون معلوم الوضع . ونعمل قِطْعاً آخر زائداً رأسه نقطة ج وسهمه على استقامة ب ج وكلٌ واحد من ضلعيه القائم والمائل مثل ب ج ، وهو ه ج ز فيكون معلوم الوضع كما بيّنه أبلونيوس في شكل نح من مقالة ا . فهذان القطعان إما أن يتلاقيا وإما أن لا يتلاقيا . فإن لم يتلاقيا فالمسألة مستحيلة . وأما إن تلاقيا بالتماس على نقطةٍ أو بالتقاطع على نقطتين ، فتكون النقطة معلومةَ الوضع . فليتلاقيا على نقطة ه ونُخرج منها عمودي ه ط ه ح على خطي ب ط ب ح فيكون العمودان لا محالة معلومي الوضع والقدر . وخط ه ط من خطوط الترتيب فيكون نسبة مربع ه ط إلى ضرب ب ط في ط ج كنسبة الضلع القائم إلى الضلع المائل كما بيّنه أبلونيوس في شكل ك من مقالة ا . والضلعان — القائم وهو المنتصب ، والمائل — متساويان ، فمربع ه ط مساوٍ لضرْب ب ط في ط ج ، فنسبة ب ط إلى ط ه كنسبة ط ه إلى ط ج . ولكن مربع ه ح الذي هو مثل ب ط مساوٍ لضرب ب ح في ب ا كما تبيّن في شكل يب من مقالة ا من كتاب المخروطات . فنسبة ا ب

---

١ — هو : وهو — ك ، ل — // ٣ — وليكن : ويكن — ك — ولكن — ل — // ٤ — ا ب : ب — با — // ٥ — د ب ه : ب د — ك ، ل — // ٧ — ب ج : ه ج — ل — / وكل ... ب ج : ناقصة — ك ، ل — / ه ج ز : ه ج د — ل — // ٨ — فيكون : ويكون — با ، ن — // ٩ — وإما أن لا ... لم يتلاقيا : في الهامش — ك — // ١٠ — وأما إن : وإن — با ، ن — / أو بالتقاطع : وبالتقطع — ك — وبالقطع — ل — // ١١ — فتكون : فيكون — ل ، ن — / النقطة : النقط — با — / معلومة : معلوم — ن — / فليتلاقيا : فليتاقيا — ل — // ١٥ ، ١٦ — القائم وهو : ناقصة — ك ، ل — / بعد أن كتب المنتصب كتب تحتها القائم — ن — // ١٩ — كتاب : ناقصة — با — //

إلى ب ط كنسبة ب ط إلى ب ح وكنسبة ب ح الذي هو مثل ه ط إلى ط ج . فالخطوط الأربعة متناسبة . فنسبة مربع ا ب الأول إلى مربع ب ط الثاني كنسبة ب ط الثاني إلى ط ج الرابع . فمكعب ب ط مساوٍ للمجسم الذي قاعدته مربع ا ب وارتفاعه ج ط . ونجعل المجسّم – الذي قاعدته مربع ا ب وارتفاعه ب ج الذي عملناه مساوياً للعدد المفروض – مشتركاً فيكون مكعب ب ط مع العدد المفروض مساوياً للمجسم الذي قاعدته مربع ا ب وارتفاعه ب ط ، وهو عدة أضلاع

١١-ب المكعب . / وقد تبين أن لهذا الصنف اختلافَ وقوعٍ ، ويقع من مسائله ما يستحيل وقد خرج بخواصّ قِطْعين ، مكافىءٍ وزائد .

الصنف الثالث : مكعب يعدل أضلاعاً وعدداً

نضع ا ب ضلعَ مربعٍ مثلِ عدّة الأضلاع ونعمل مجسماً قاعدته مربع ا ب ويكون مساوياً للعدد المفروض ، وليكن ارتفاعه

---

٢ – ط ج : ط ح – ك ، ل – / الأول : الأولى – يا – // ٦ – ب ط : ط – ك، ل –
٩ – مسائله : مسائلها – ك ، ل ، ن – / وزائد : وزوايد – ك ، ل – // ١٠ – يعدل : يعد – ل – // ١١ – الأضلاع : كتبها اضلاع ثم كتب « لأ » فوق السطر – ل –
١٢ – قاعدته : قاعدة – ك ، ل – / للعدد : كتبها للعمل ثم حذفها وكتب للعدد فوقها – ل –

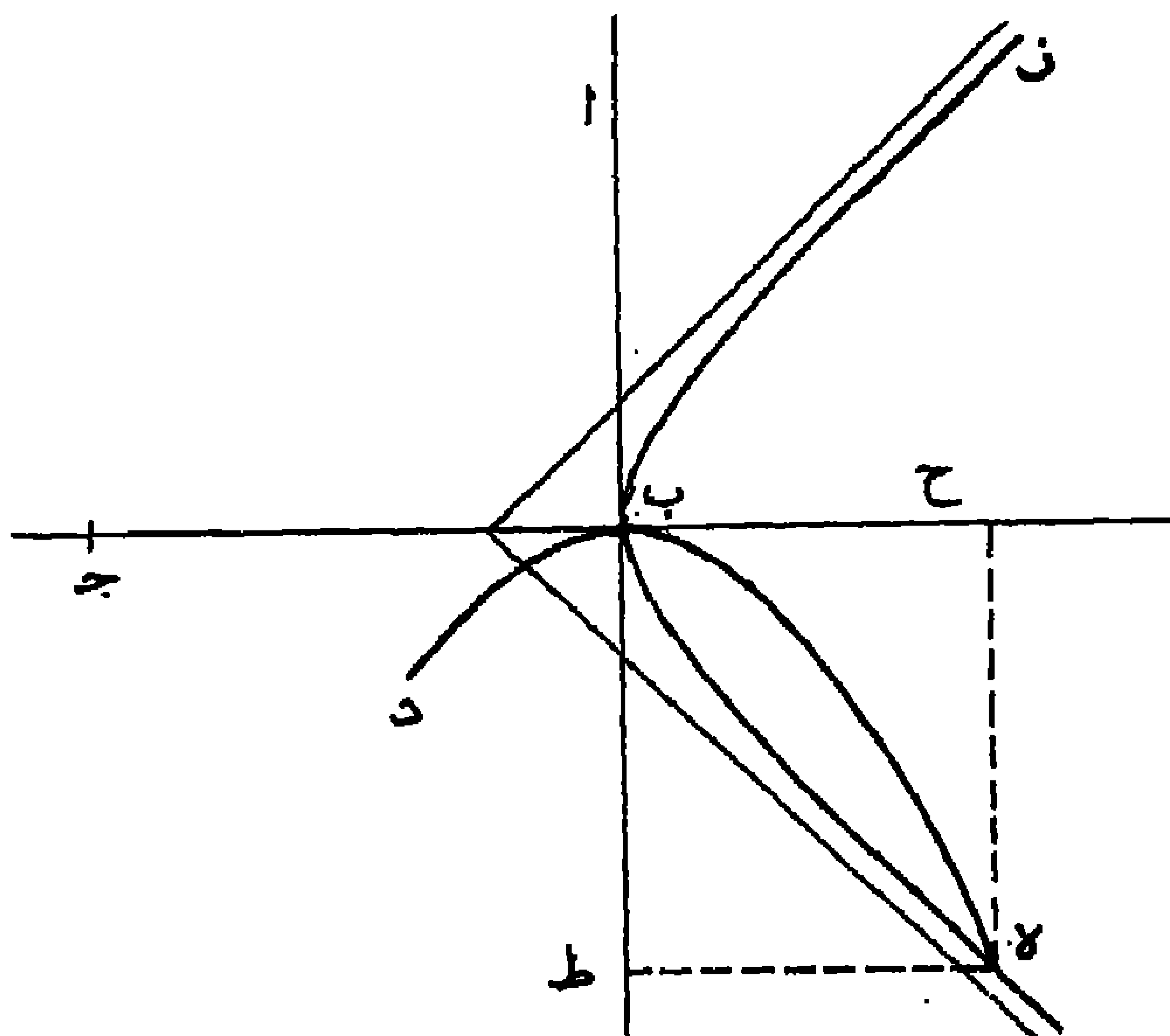
ب ج عموداً على ا ب . ونُخرج ا ب ب ج على استقامة ، ونعمل قِطْعاً مكافئاً رأسُه نقطة ب وسهمه على استقامة ا ب وضلعه القائم ا ب وهو د ب ﻫ ، فيكون معلوم الوضع ويكون مماسّاً لخط ب ج كما بيّنه أبلونيوس في شكل لج من مقالة ا . ونعمل قِطْعاً آخر زائدا رأسه نقطة ب وسهمه على استقامة ب ج وكل واحد من ضلعيه — القائم والمائل — مثل ب ج ، وهو قِطْع ز ب ﻫ ، فيكون معلوم الوضع ومماساً لخط ا ب . فالقِطعان لا محالة يتقاطعان . فليتقاطعا على نقطة ﻫ فتكون معلومة الوضع . ونُخرج من نقطة ﻫ عمودَيْ ﻫ ط ﻫ ح فهما معلوما الوضع والقدر . وخط ﻫ ح من خطوط الترتيب فعلى ما تقدم يكون مربعه مساوياً لضرب ج ح في ب ح . فنسبة ج ح إلى ﻫ ح كنسبة ﻫ ح إلى ح ب . لكن نسبة ﻫ ح — الذي هو مثل ب ط — إلى ح ب — الذي هو مثل ﻫ ط — وهو من خطوط الترتيب في القِطْع الآخر — كنسبة ﻫ ط إلى ا ب الذي هو الضلع القائم للقِطع ، فالخطوط الأربعة متناسبة . فنسبة ا ب إلى ح ب كنسبة ح ب إلى ب ط وكنسبة ب ط إلى ج ح . فنسبة مربع ا ب الأول إلى مربع ح ب الثاني كنسبة ح ب الثاني إلى ج ح / الرابع . فيكون مكعب ح ب مساوياً ١٢-ا
للمجسّم الذي قاعدته مربع ا ب وارتفاعه ج ح لأن ارتفاعيهما مكافئان لقاعدتيهما . لكن هذا المجسم مساوٍ للمجسم الذي قاعدته مربع ا ب وارتفاعه ب ج الذي عملناه مساوياً للعددِ المفروضِ ، والمجسمِ الذي يحيط به قاعدةٌ مساويةٌ لمربع ا ب وارتفاع ب ح الذي

---

٣ — فيكون : ويكون — ك ، ل ، با ، ن — / ب ج : ب ح — ك ، ل — / كما : على ما — با — // ٥ — ضلعيه : ضلعه — با — // ٦ — فيكون : ويكون — ك ، ل ، ن — ٧ — فليتقاطعا : فليتقاطعان — ك — فاليتقاطعان — ل — // ٨ — فتكون : فيكون — ل ، ن — ١١ — الذي : إلى — با — // ١٢ — ح ب : ح ب — ن — // ١٣ — ﻫ ط : ﻫ — ك ، ل — ١٤ — فنسبة — نسبة — با ، ن — // ١٥ — ج ح : ح ب — ك ، ل — / فنسبة : نسبة — ل — ١٦ — مكعب : في الهامش — ك — // ١٧ ، ١٩ — ج ح لأن ... مربع ا ب — ناقصة — ك ، ل — ٢٠ — والمجسم : معطوف على قوله : للمجسم — / قاعدة : قاعدته — با ، ن — / وارتفاع : وارتفاعه — با ، ن —

هو مثل عدة الأضلاع المفروضة لمكعب ب ح . فمكعب ب ح مثل العدد المفروض ومثل عدة أضلاعه المفروضة وذلك المرادُ .

فقد تبين أنه ليس لهذا الصنف اختلافُ وقوعٍ ولا فيه شيء يستحيل ، أعني في مسائله . وقد خرج بخواصّ قِطعين ، مكافىء وزائدٍ معاً .



الصنف الرابع من الأصناف الستة الثلاثية : مكعب وأموال تعدل عدداً .

نضع خط ا ب لعدة الأموال ونعمل مكعباً مساوياً للعدد المفروض وليكن ضلعه ح . ونُخرج ا ب على استقامةٍ ، ونجعل ب ط مثل ح ، ونتمم مربع ب ط د ج ونعمل على نقطة د قِطْعاً زائداً لا يلقاه ب ج ب ط ، وهو قِطْع ه د ن كما تبين من قوة شكلي د و ه من مقالة ب وشكل نط من مقالة ا . فيكون قِطع ه د ن معلومَ الوضع لأن

---

٢ — ومثل : مثل — ك ، ل — / المراد : ما أردنا — ن — // ٤ — أعنى في : من — ك ، ل — / مكافىء : ناقصة — ك ، ل — // ٥ — الأصناف : أصناف — ن — / تعدل : يعدل — ن — / عددا : أعدادا — ك ، ل ، ن — // ٦ — العدد : العدد — ل — // ٨ — ونتمم : ونتّم — ك ، ل ، با — / على نقطة : وعليه نقطة — ك ، ل — // ٩ — ه د ن : ه د ز — با ، ن — / شكلي : علي — ن — / و ه : د ه — ل — // ١٠ — د ه ن : ه د ز — با ، ن —

نقطة د معلومة الوضع وخطا ب ج ب ط معلوما الوضع . ونعمل قطعاً مكافئاً رأسه نقطة ا وسهمه ا ط وضلعه القائم ب ج وهو قطع ا ك ، فيكون قطع ا ك معلوم الوضع . والقطعان يتقاطعان باضطرار ، فليتقاطعا على نقطة هـ فتكون هـ معلومة الوضع . ونُخرج منها عمودي هـ ز هـ ل على خطي ا ط ب ج ، فيكونان معلومي الوضع والقدر . وأقول : إنه لا يمكن / أن يَقطع قِطْعُ ا هـ ك قِطْعَ هـ د ن على نقطة ١٢-ب يكون العمودُ النازل منها إلى خط ا ط هو واقعاً على ط أو خارجاً منها .

فليقع على ط إن أمكن ، فيكون مربعه مساوياً لضرب ا ط في ط ب الذي هو مثل ب ج . لكن ذلك العمود يكون مساوياً لعمود د ط فيكون مربع ط د مساوياً لضرب ا ط في ط ب . وهو أيضا مساوٍ لضرب ب ط في مثله ، هذا محال . فليس العمود يقع على ط .

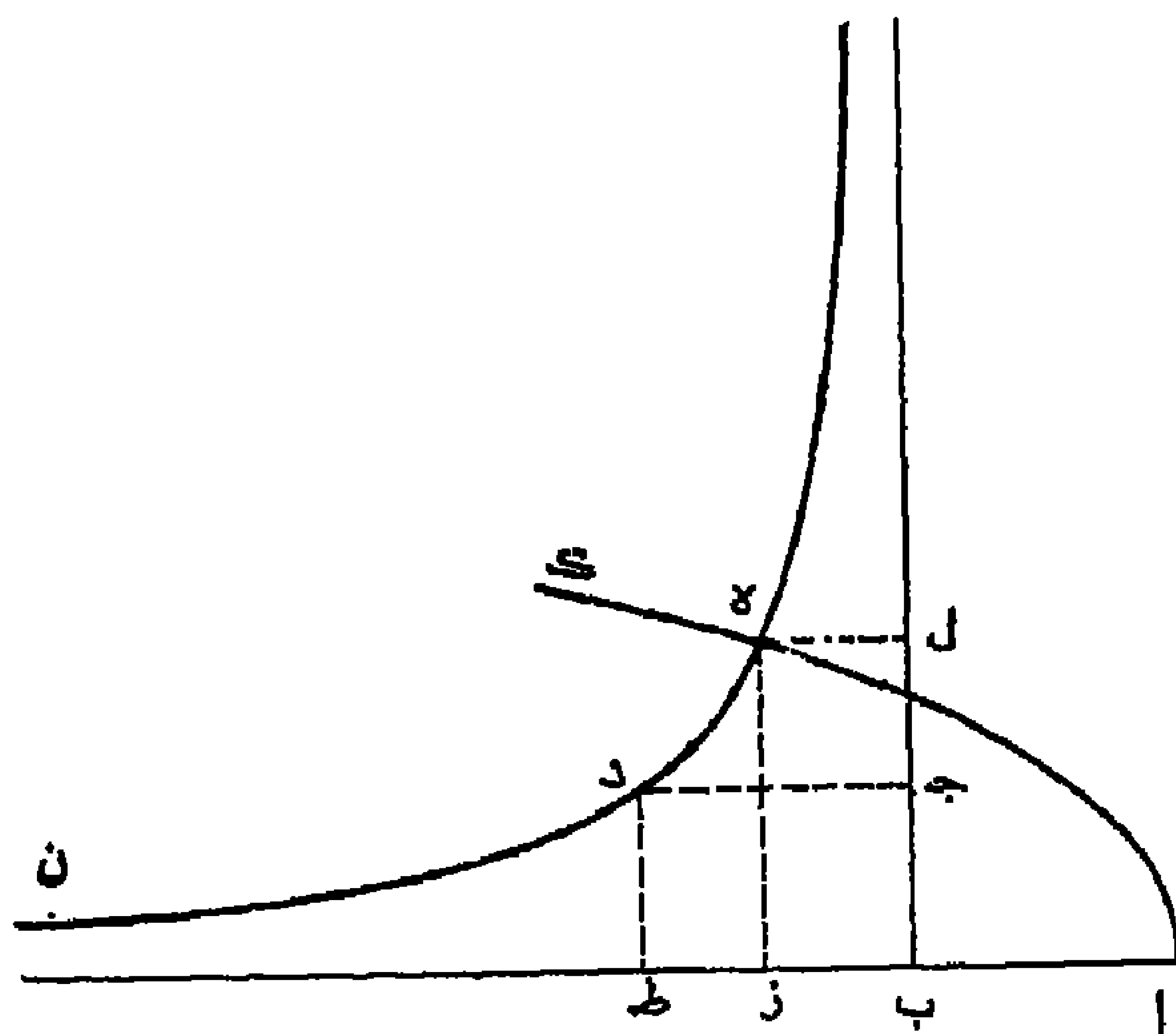
وكذلك لا يقع خارجاً منه ، لأنه يكون ذلك العمود حينئذ أقصر من ط د ، فيكون هذا المحال ألزمَ .

فباضطرارٍ يقع العمود على نقطةٍ فيما بين ا ط مثل هـ ز . ومربع هـ ز مثل ضرب ا ز في ب ج ، فيكون نسبة ا ز إلى هـ ز كنسبة هـ ز إلى ب ج ؛ وسطح هـ ب مثل سطح د ب كما تبيّن في شكل ح من مقالة ب من المخروطات ، فيكون نسبة هـ ز إلى ب ج

---

١ – وخطا : وخط – ن – / ب ج : ب ح – ك ، ل – // ٢ – ا ط : اهـ – ن – / ب ج : د ج – با ، ن ، ك ، ل – // ٣ – باضطرار : ناقصة – با ، ن – // ٤ – فتكون : فيكون – ك ، ل ، ن – // ٥ – ب ج : ب ح – ك ، ل – // ٦ – هـ د ن : د ز هـ – با ، ن – د هـ ز – ك ، ل – // ٧ – ط أو : ط ا و – ل – // ٩ – فليقع : فليقطع – با – // ١٠ ، ١١ – الذي ... ا ط في ط ب : ناقصة – ك ، ل – / مساو : مساويا – ك ، ل – // ١٥ – فباضطرار : فباضطرار أن – ن – // ١٦ – ب ج : ب ح – ك ، ل – / هـ ز : هـ د – ل – // ١٨ – فيكون : يكون – ك ، ل ، با ، ن – / ب ج : ب ح – ك ، ل –

كنسبة ب ج إلى ب ز . فالخطوط الأربعة متناسبة : آ ز ، هـ ز ، ب ج ، ب ز . فنسبة مربع ب ز الرابع إلى مربع ب ج الثالث كنسبة ب ج الثالث إلى آ ز الأول . فيكون مكعب ب ج — الذي عملناه مساوياً للعدد المفروض — مساوياً للمجسم الذي قاعدته مربع ب ز وارتفاعه آ ز ، لكن هذا المجسم الذي قاعدته مربع ب ز وارتفاعه آ ز مساوٍ لمكعب ب ز والمجسمِ الذي قاعدته مربع ب ز وارتفاعه ا ب . وهذا المجسم — الذي قاعدته مربع ب ز وارتفاعه آ ب — < فارتفاعه > هو مثل عدة الأموال المفروضة . فمكعب ب ز مع عدة أمواله المفروضة مساوٍ للعدد المفروض ، وذلك ما أردنا أن نبيّن .



وهذا الصنف ليس فيه اختلاف وقوع ، ولا يستحيل شيء من
١٣-ا مسائله ، وقد خرج بخواص القِطعين المكافيء والزائد معاً . /

١ ، ٢ — فالخطوط ... ب ز : ناقصة — ك ، ل — // ٣ — آ ز : آ د — ل — // ٥ — آ ز : آ د — ل — / الذي ... وارتفاعه : في الهامش — ك — / ب ز : ب د — ل — / آ ز : آ د — ل — ٦ — ب ز : ب د — ل — / ب ز : ب د — ل — / وهذا : ناقصة — ك ، ل — // ٧ — المجسم ... آ ب : في الهامش — ك — / مربع ب ز : ناقصة — ل — / هو ناقصة — ن — // ١٠ — وقوع : وقع — ك ، ل — // ١١ — القطعين : القطع — ك ، ل ، ن — القطوع — با — / الزائد : الزوايد — ك ، ل —

الصنف الخامس من الأصناف الستة الثلاثية الباقية : مكعب وعدد يعدل مالاً .

نفرض ا جـ لعدة الأموال ونعمل مكعباً مساوياً للعدد المفروض ويكون ضلعه حـ ، فخط حـ لا يخلو : إما أن يكون مساوياً لخط ا جـ أو أعظم منه أو أصغر . فإن كان مساوياً له استحالت المسألة ، لأنه لا يخلو : إما أن يكون ضلعُ المكعب المطلوبِ مثلَ حـ أو أصغرَ أو أكبرَ . فإن كان مثله كان ضرْب ا جـ في مربعه مثل مكعب حـ فيكون العدد مثل عدة الأموال ولا يُحتاج إلى زيادة المكعب . وإن كان ضلعُ المطلوب أصغر منه كان ضرب ا جـ في مربعه أصغر من العدد المفروض فيكون عدة الأموال أصغر من العدد المفروض فضلاً عن الزيادة . وإن كان الضلع أكبر من حـ كان مكعبه أكبر من ضرب ا جـ في مربعه فضلاً عن زيادة العدد عليه .

ثم إن كان حـ أعظم من ا جـ يكون المحالُ في الوجوه الثلاثة ألزمَ . فيجب أن يكون حـ أصغر من ا جـ وإلا فالمسألة مستحيلة .

فنفصل ب جـ من ا جـ مثل حـ ، فخط ب جـ إما أن يكون مثل ا ب أو أعظم منه أو أصغر . فليكن في الشكل الأول مثله ، وفي الثاني أعظم منه ، وفي الثالث أصغر منه ، ويتم في الأشكال الثلاثة مربعُ د جـ ونعمل على نقطة د قطعاً زائداً لا يلقاه ا جـ جـ هـ وهو في الأول د ز وفي الثاني وفي الثالث د ط . ونعمل قطعاً مكافئاً رأسُه نقطة ا وسهمه ا جـ وضلعه القائم ب جـ ، وهو في الأول ا ط وفي الثاني ا ل وفي الثالث ا ك . ويكون القطعان معلوميْ الوضع . ففي الأول يمرّ القطع المكافىء على نقطة د لأن مربع د ب مساوٍ لضرب ا ب في ب جـ فيكون

٤ — يخلو : يخلوا — ن — // ٦ — يخلو : يخلوا — ك ، ن — // ١٠ — العدد : ناقصة — ك ، ل — // ١١ — أكبر : أكثر — ك ، ل — // ١٣ — يكون : فوق السطر — ك — ١٥ — فنفصل : فيفصل — ن — فمفصل — ل — // ١٨ — على : عليه — با — // ١٩ — وفي الثالث : والثالث — با ، ن — / ونعمل : ويعمل — ن — // ٢١ — ففي : ففي القطع — با —

دَ على محيط القِطع المكافىء ويلقاه على نقطة أخرى . ويمكنك أن تتفطن له بأدنى تأمل . وفي الثاني تكون نقطة دَ خارجة من محيط المكافىء لأن مربع دبَ أعظم من ضرب ابَ في بَ جَ . فإن التقى ١٣-ب القِطعان بالتماس / على نقطة أخرى أو بالتقاطع فيكون العمود النازل منها واقعاً لا محالة فيما بين نقطتي اَ بَ . وكانت المسألة ممكنة وإلا فهي مستحيلة .

وهذا التماس أو التقاطع لم يتفطن له أبو الجود المهندس الفاضل ، حتى جزَم القضاءَ بأن بَ جَ إذا كان أعظم من ا بَ كانت المسألة مستحيلة ، وأبْطلَ في حكمه هذا . وهذا الصنف هو الذي اضطرّ إليه الماهاني من بين الأصناف الستة حتى تعرف .

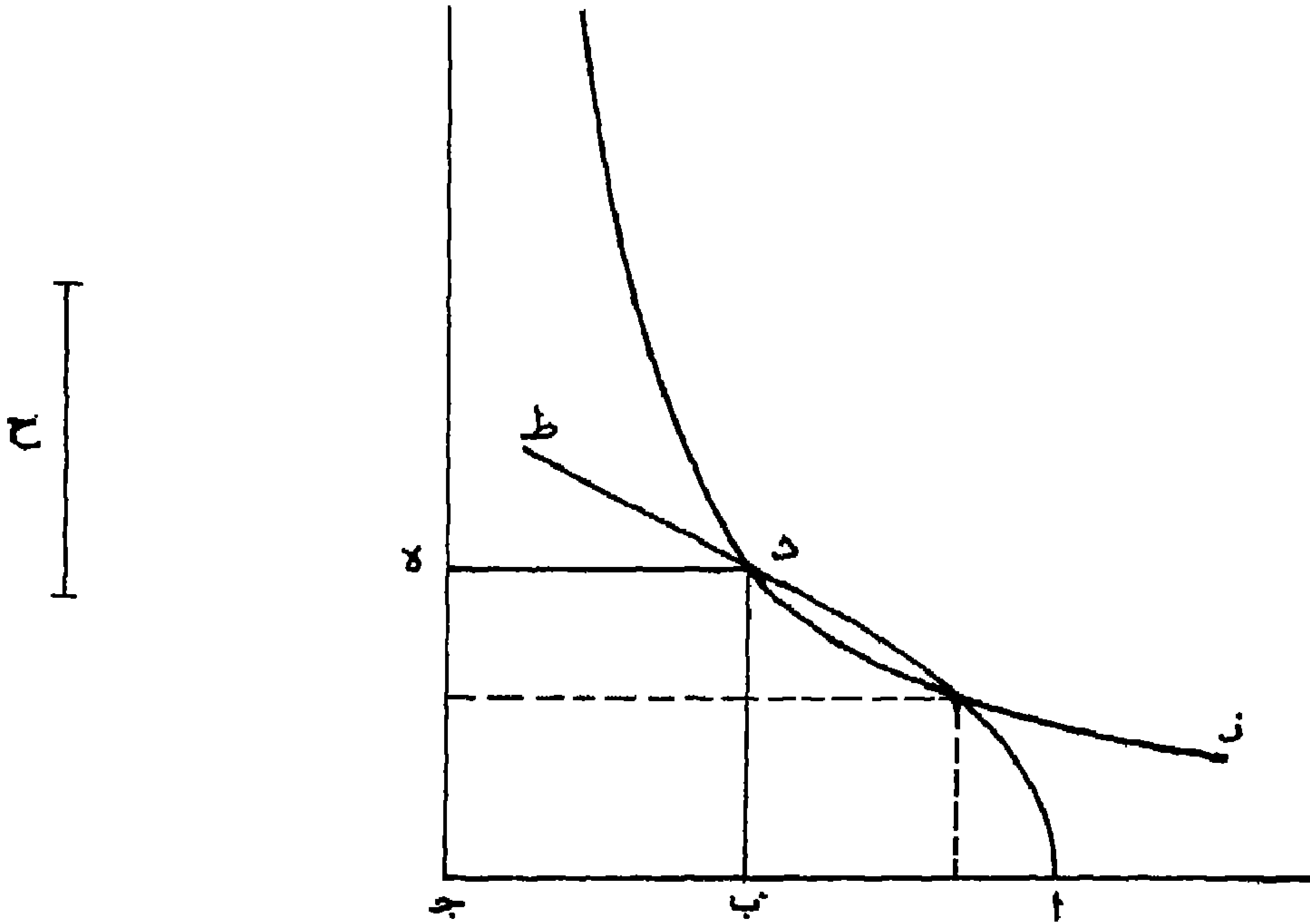
وفي الثالث تكون نقطة دَ داخل القِطع المكافىء ، فيتقاطع القطعان على نقطتين . وبالجملة ، فإنا نُخرج من نقطة الالتقاء عموداً على ا بَ ، وليكن في الشكل الثاني ط زَ ، وكذلك عموداً آخرَ منها على جـ هـ وهو ط كَ . فسطح ط جَ مثل سطح دجَ فيكون نسبة ز جَ إلى ب جَ كنسبة ب جَ إلى ط زَ ، و ط زَ من خطوط الترتيب في قِطع ا ط لَ فيكون مربعه مثل ضرب ا زَ في ب جَ ، فيكون نسبة ب جَ إلى ط زَ كنسبة ط زَ إلى ز اَ . فالخطوط الأربعة متناسبةٌ : نسبةُ ز جَ إلى جـ بَ كنسبة جـ بَ إلى ط زَ وكنسبة ط زَ إلى ز اَ . فنسبة مربع ز جَ الأول إلى مربع ب جَ الثاني كنسبة ب جَ الثاني إلى ز اَ الرابع ، فيكون

١ – ويمكنك : يمكنك – ك ، ل – // ٢ – تكون : يكون – ن ، ل – // ٤ – بالتقاطع : بالتقاطع له – ن – // ٥ – لا محالة فيما : فيما لا محالة له – ك ، ل – / وكانت : كانت – ك ، ل ، با ، ن – // ٨ – جزم القضاء : حزم القضا – ك – حزم الفصا – ل – حزم القضا – با – جزء من القصا – ن – / إذا : ان – با – // ١٠ – الماهاني : المهانى – ن – ١١ – تكون : يكون – ل ، ن – / فيتقاطع : فيقاطع – ن – / القطعان : القطعين – با – ١٣ – وليكن : فليكن – ل – / الثاني – بَ – با – / ط زَ : ط دَ – ل – / عموداً : عمود – ل – // ١٦ – فيكون : يكون – ك ، ل ، با ، ن – // ١٧ – فالخطوط : الخطوط – با – ١٩ – الأول : ناقصة – ل –

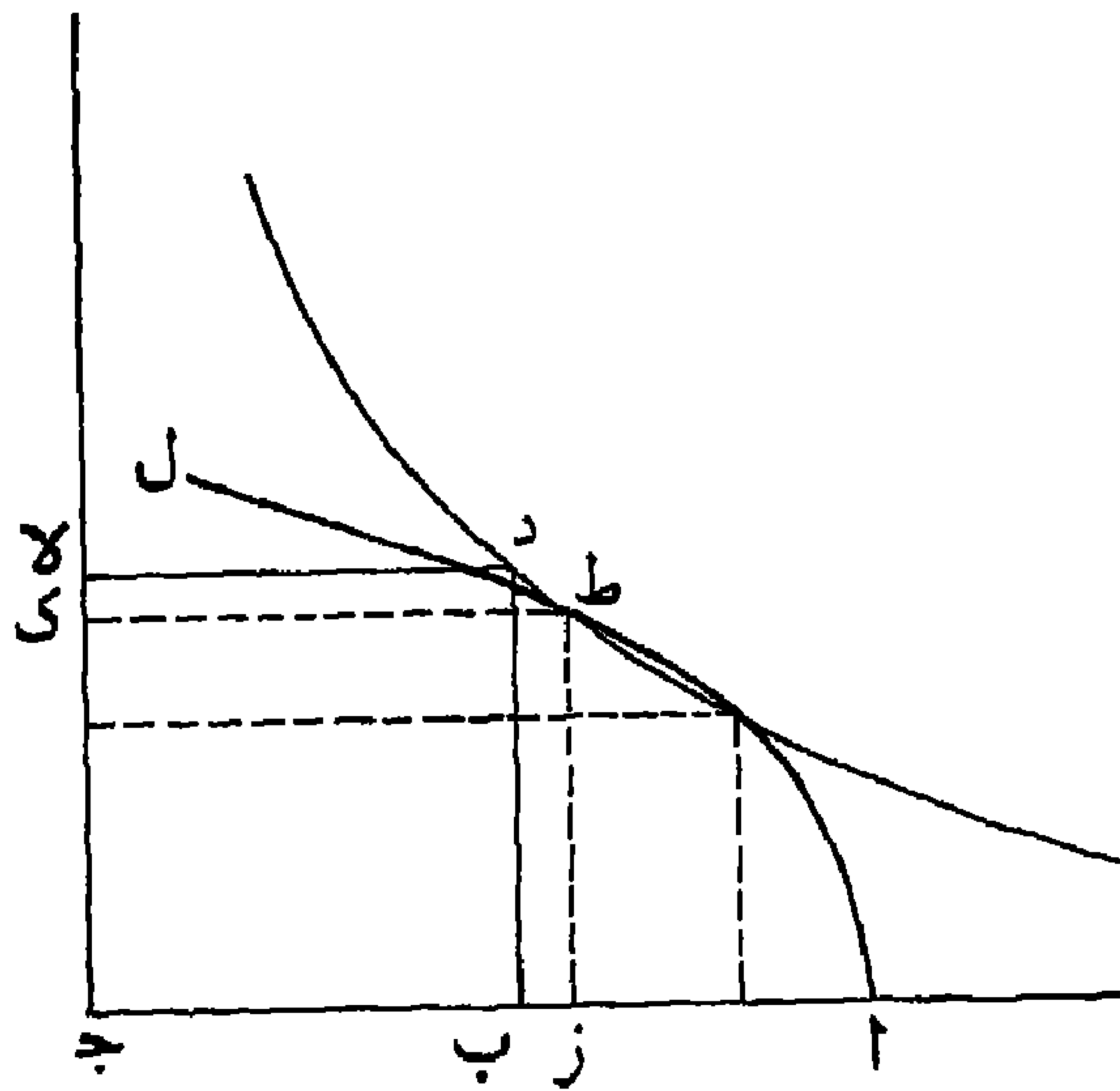
مكعب ب جـ – الذي هو مثل العدد المفروض – مساوياً للمجسّم الذي قاعدته مربع ز جـ وارتفاعه ز ا . ونجعل مكعب ز جـ مشتركاً . فمكعب ز جـ مع العدد المفروض مساوٍ للمجسم الذي قاعدتـه مربع ز جـ وارتفاعه ا جـ الذي هو مثل عدة الأموال المفروضة ، وذلك المراد .

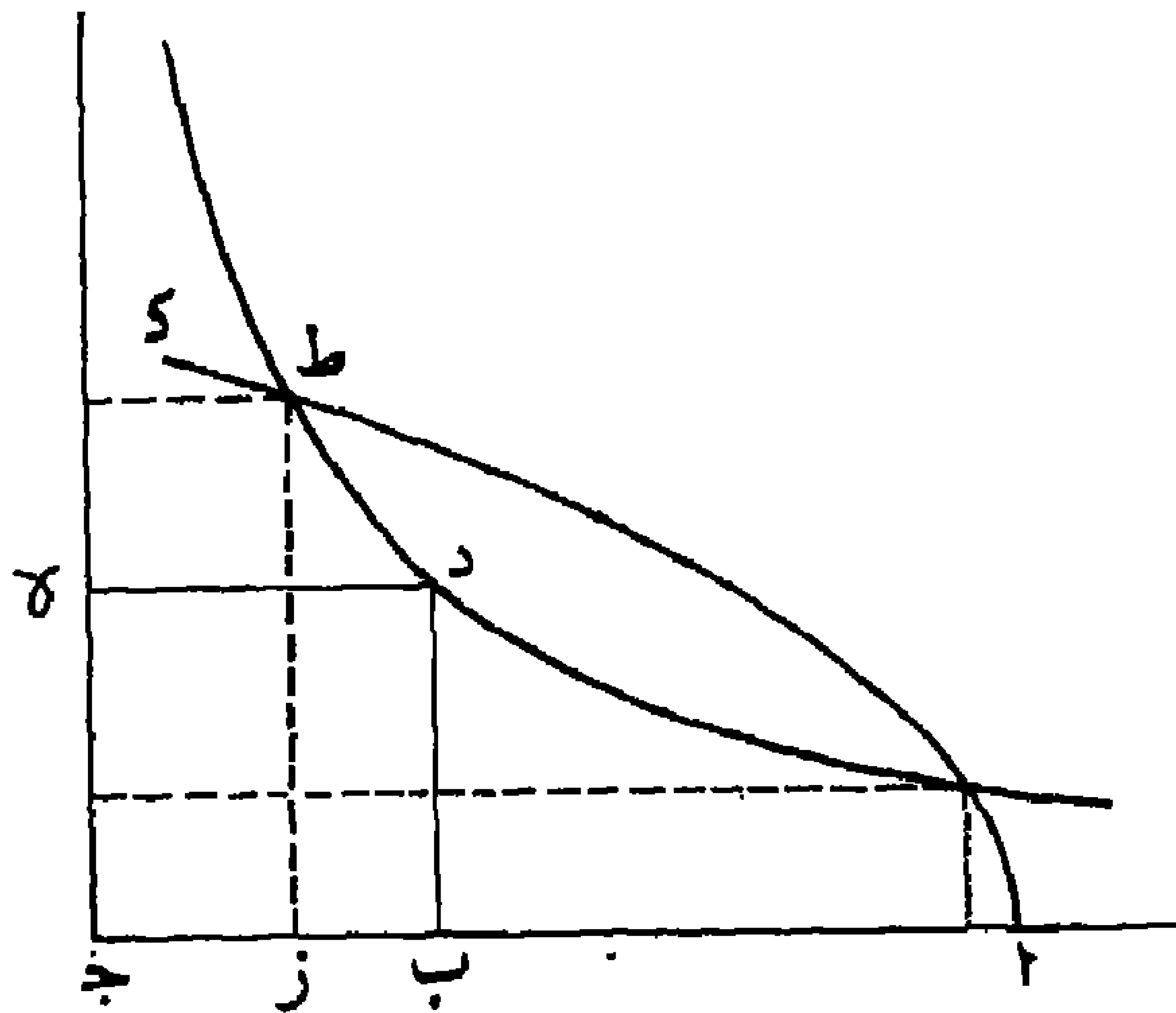
وقس عليه الباقيتيْن ، على أن الثالث يَخرج منه مكعبان لا محالة ، لأن كلَّ عمود يفصل ضلعَ مكعبٍ من جـ ا كما بُيّن .

فقد تبيّن أن هذا الصنف له / اختلافُ وقوعاتٍ ، وقد يقع فيها ١٤-ا
ما يستحيل ، وقد خرج بخواصّ قِطعين ، مكافىءٍ وزائد معاً .



١ – هو مثل : ممحوة – با – / مساويا : مساو – با – / للمجسم : للجسم – ك ، ل – // ٢ – ز جـ : زب – ك ، ل ، با ، ن – / ز جـ : زب – ك ، ل ، با ، ن – // ٣ – ز جـ : زب – ك ، ل ، با ، ن – / ز جـ (الثانية) : زب – ك ، ل ، با ، ن – // ٥ ، ٦ – وقس ... بُيّن : ناقصة – ك ، ل – // ٥ – منه : منها – با ، ن – // ٦ – بيّن : تبين – ن – // ٨ – وقد خرج : وخرج – با ، ن – / مكافىء : مكاف – ك ، ل ، با ، ن – / وزائد : وزوايد – ك ، ل –





الصنف السادس من الأصناف الستة الثلاثية الباقية هو : مكعب يعـــدل أموالاً وأعداداً .

نفرض عدة الأموال خطَّ اب ونعمـــل مجسماً ارتفاعـــه اب وقاعدته مربع ، ويكون مساوياً للعدد المفروض . وليكن ضلع قاعدته

---

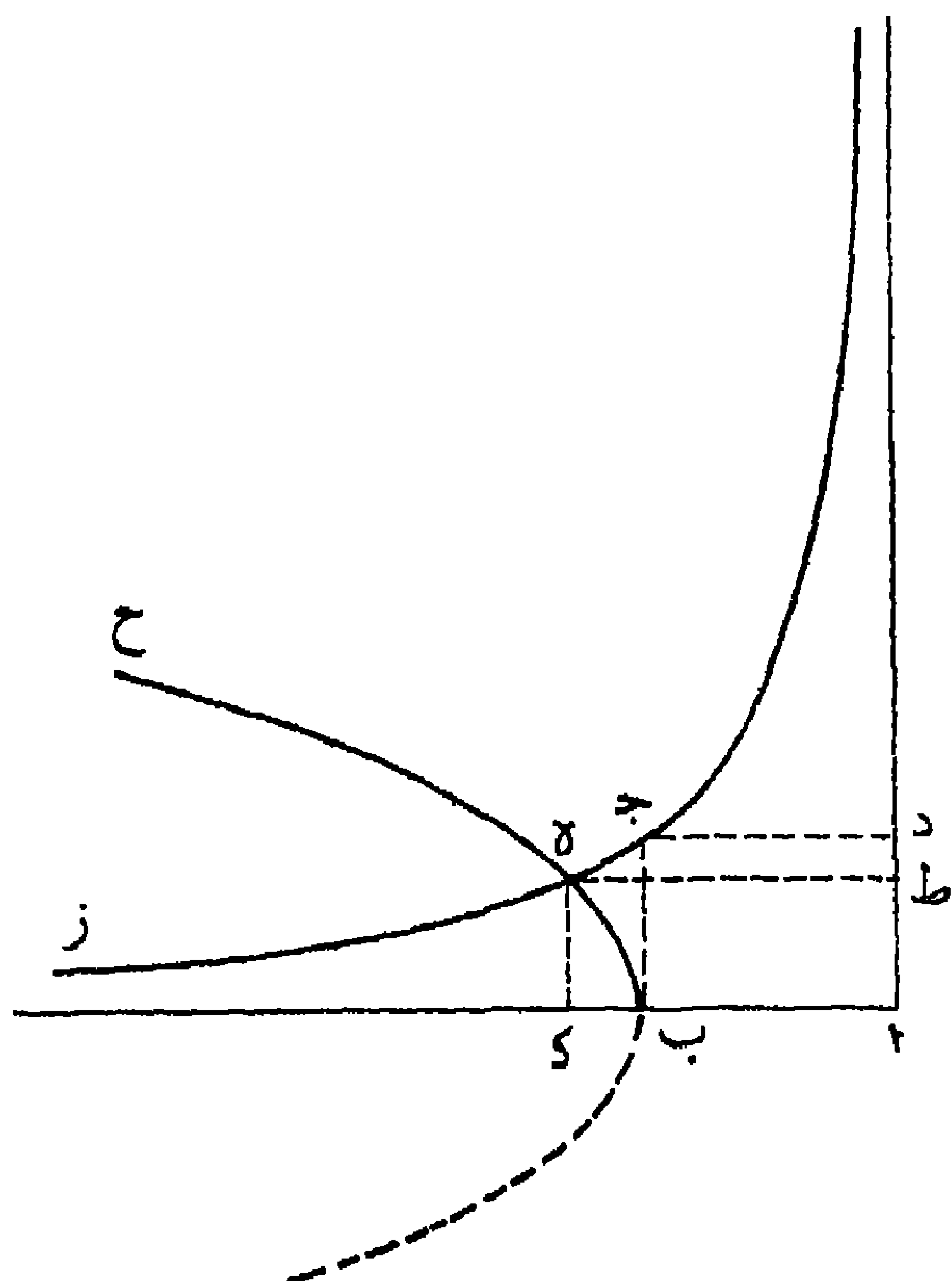
٣ — نفرض : يفرض — ن — // ٤ — ويكون : الواو فوق السطر — ل —

ب ج عموداً على ا ب ونتم سطح د ب ، ونعمل على نقطة ج المعلومة الوضع قطعاً زائداً لا يلقاه ا ب ا د* وهو قطع ج ه ز ، وقطعاً آخر مكافئاً رأسه نقطة ب وسهمه على استقامة ا ب وضلعه القائم ا ب وهو ب ه ح . فهذان القطعان يتقاطعان باضطرار . فليتقاطعا على ه فتكون ه معلومة الوضع ، ونُخرج منها عمودي ه ط ه ك على ا ب ا د فسطح ه ا مثل سطح ج ا ، فيكون نسبة ا ك إلى ب ج كنسبة ا ب إلى ه ك وتكون مربعاتها أيضا متناسبة . لكن مربع ه ك مثل ضرب ك ب في ا ب لأن ه ك خطٌ ترتيبٍ في قطع ب ه ح ، فيكون نسبة مربع ا ب إلى مربع ه ك كنسبة ا ب إلى ب ك ، فنسبة / مربع ب ج ١٤-ب
إلى مربع ا ك كنسبة ب ك إلى ا ب ، فيكون المجسّم الذي قاعدته مربع ب ج وارتفاعه ا ب مساوياً للمجسم الذي قاعدته مربع ا ك وارتفاعه ك ب لتكافؤ الارتفاعين والقاعدتين . ونجعل المجسم الذي قاعدته مربع ا ك وارتفاعه ا ب مشتركاً ، فيكون مكعب ا ك مساوياً للمجسم — الذي قاعدته مربع ب ج وارتفاعه ا ب الذي عملناه مثل العدد المفروض — مع المجسم الذي قاعدته مربع ا ك وارتفاعه ا ب الذي هو عدة الأموال المفروضة . فيكون مكعب ا ك مثل عدة أمواله المفروضة مع العدد المفروض .

وليس لهذا الصنف اختلافُ وقوعٍ ، ولا يستحيل من مسائله شيء ، وقد خرج بخواصّ قطعين ، مكافيء وزائد معاً .

---

١ — ونتم : وتتمم — ن — ويتم — ل — // ٢ — قطعا : كتبها قطع ثم صححها عليها — با — /
* هنا تتوقف مخطوطة ن لتبدأ من جديد بعد عديد من الورقات وسنشير إليه في حينه
٤ — يتقاطعان : متقاطعان — ك ، ل — / باضطرار : باضراب — ل — // ٥ — فتكون : فيكون — ل — // ٦ — سطح : ناقصة — با — // ٧ — وتكون : ويكون — ل —
٨ — ب ه ح : ب ه ك — ك ، ل — ب ه ز — با — // ٩ — ا ب : ناقصة — ل —
١١ — مربع ... قاعدته : ناقصة — ك ، ل — // ١٩ — مكافيء : مكاف — ك ، ل ، با — / وزائد : وزوايد — ك ، ل —



< معادلات الدرجة الثالثة المركبة من أربعة حدود ـ ١ ـ >

وإذ قد أتينا على الأصناف الثلاثية فلنقل على الرباعية الأربعة التي كل صنف منها مركب من تعادُل ثلاثةٍ وواحدٍ

فالصنف الأول من الأربعة الرباعية هو : مكعب وأموال وأضلاع تعدل أعداداً .

نضع ب ه ضلعَ مربع مساوٍ لعدة الأضلاع المفروضة ، ونعمل

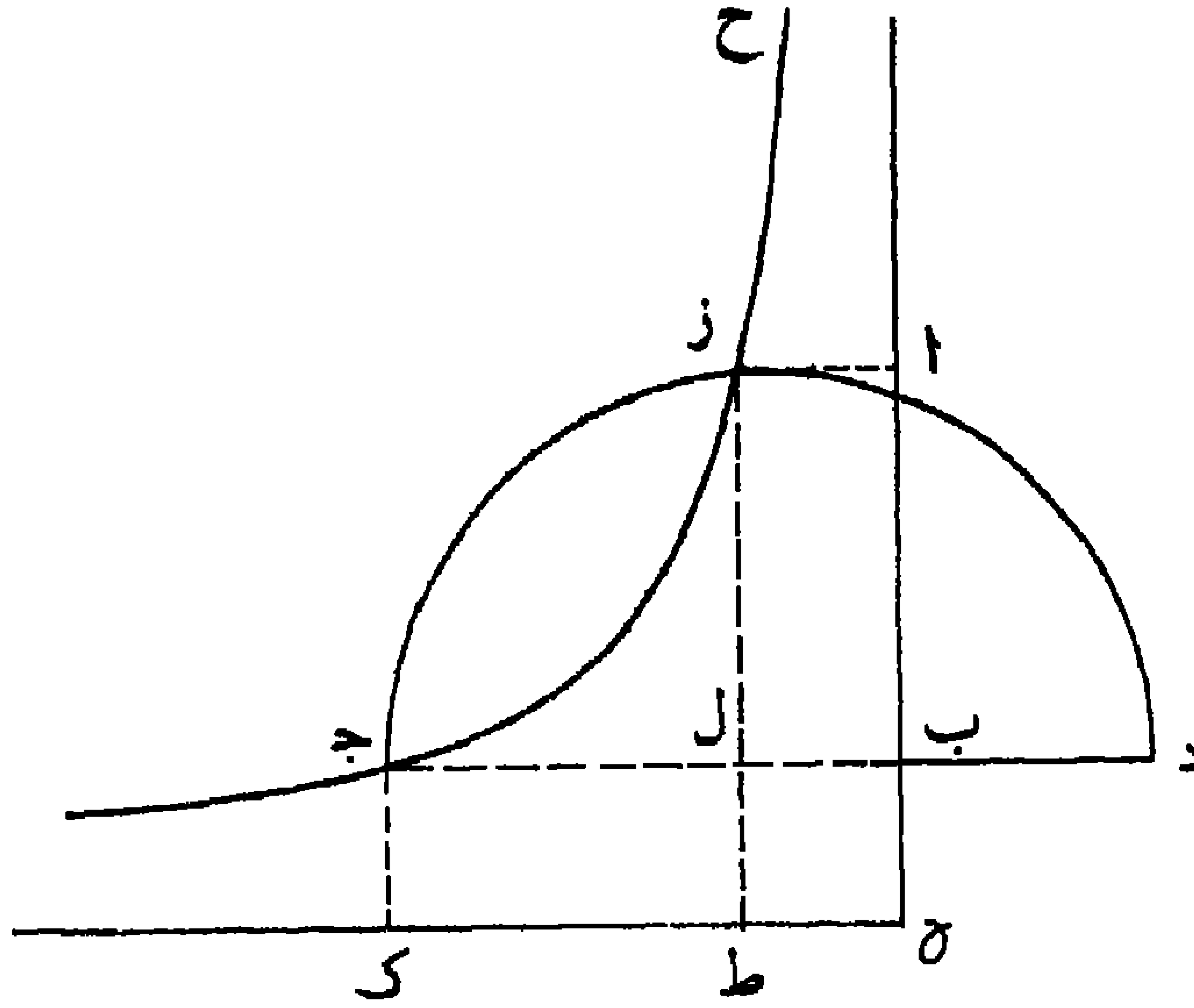
---

٢ — أتينا : أثبتنا — ك ، ل — / الأربعة : ناقصة — ك ، ل — // ٣ — مركب من : مركبين — ك — مركبين من — ل — من الواضح أن ناسخ ل نقلها مركبين ثم أزاد « من » — / وواحد : أو واحد — ك ، ل — // ٦ — ضلع : كتب ناسخ ك « كل ضلع » ثم حذف كل بخط خفيف — كل ضلع — ل —

مجسّماً قاعــدته مربع ب ه ويكون مساوياً / للعدد المفروض ، وليكن ارتفاعــه ب ج عموداً على ب ه . ونعمــل ب د مثل عدة الأمــوال المفروضة على استقامة ب ج . ونعمــل على قطر د ج نصف دائــرة د ز ج ، ونتم سطح ب ك . ونعمل قطعاً زائداً رأسُه نقطــه ج ولا يلقاه خطّا ب ه ه ك . فهو يقطع الدائرة على نقطه ج لأنه يقطــع الخط المماس لها وهــو ج ك . فيلزم أن يقطعها على نقطــة أخــرى . فليقطعها على ز ، فتكون ز معلومة الوضع لأن الدائرة والقطع معلوما الوضــع . ونخرج من ز / عمــودي ز ط ز ا على ه ك ه ا . فسطح ز ه مثل سطح ب ك . ونلقى ه ل المشــترك يبقى سطح ز ب مثــل سطح ل ك ، فيكون نســبة ز ل إلى ل ج كنسبة ه ب إلى ب ل لأن ه ب مثل ط ل ، وكذلك مربعاتها أيضاً متناسبة . لكن نسبة مربــع ز ل إلى مربــع ل ج كنسبة د ل إلى ل ج — للدائرة — فيكون نســبة مربع ه ب إلى مربع ب ل كنسبة د ل إلى ل ج ، فيكون المجســم — الذي قاعدته مربع ه ب وارتفاعه ل ج — مثلَ المجسّم الذي قاعدتــه مربع ب ل وارتفــاعه د ل . لكنّ هــذا المجسَّمَ الأخيرَ مثلُ مكعب ب ل مع المجسم الذي قاعــدته مربع ب ل وارتفاعه ب د الذي هــو مثل عدة الأموال المفروضة . ونجعل المجسم — الذي قاعدته مربع ه ب وارتفاعه ب ل الذي هو مثل عدة الجذور — مشتركا ، فيكون المجسم ١٥-ا

١ — وليكن : ليكن — ك ، ل — // ٢ — ونعمل: ونجعل — ك ، ل — // ٣ — د ج : د ح — با — // ٥ — خطا ب ه ه ك — ك — خط ا ب ه ك ، فمن الواضح أن الناسخ قد ألحق الألف من خطا إلى الهاء ثم حذف الهاء الأخرى . ونجدها أيضا هكذا في « ل » — // ٦ ، ٧ — على نقطة ... على ز : على نقطة يعني فليقطعها على ز — ك — في الهامش وبخط مختلف ونجدها أيضا هكذا في نص ل مع استبدال ز بـ د — // ٧ — فتكون : فيكون — ل — / ز : ناقصة — ل — // ٨ — ز ط : ب ط — با — // ٩ — ز ه : د ه — ل — / ونلقى : ويلقي — ل — // ١٠ — فيكون : يكون — ك ، ل ، با — // ١٢ — ز ل : د ل — ل — / د ل : ج ل — ل — / للدائرة : إلى الدائرة — با — // ١٣ — المجسم: الجسم — ك ، ل — // ١٦ — هو : فوق السطر — ل —

الذي قاعدته مربع ه ب وارتفاعه ب ج الذي عملناه مساوياً للعدد المفروض مثل مكعب ب ل مع مثل عدة أضلاعه المفروضة ومع مثل عدة أمواله المفروضة . وذلك ما أردنا أن نبيّن . فليس لهذا الصنف اختلافُ وقوعٍ ، ولا يستحيل من مسائله شيء ، وخرج بخواص القِطع الزائد مع خواص الدائرة .



الصنف الثاني من الأصناف الأربعة الرباعية هو : مكعب وأموال وأعداد تعدل أضلاعاً .

نضع ا ب ضلعَ مربعٍ مساوٍ لعدة الأضلاع و ب ج لعدة الأموال المفروضة ويكون عموداً على ا ب . ونعمل جسماً قاعدته مربع ١٥- ب ا ب ويكون مساوياً للعدد المفروض ، وليكن ارتفاعه ب د / على استقامة ب ج . ونعمل على نقطة د قِطعاً زائداً لا يلقاه ا ب ا ه بعد أن تممنا

---

٣ – عدة : عدد – ك ، ل ، با – / المفروضة : المفروض – ك ، ل – // ٥ – القطع : ناقصة – ك ، ل – / الزائد : أولها غير واضح ويمكن قراءتها الزايدة – ك – زايدة – ل – خواص : ناقصة – ك ، ل – // ٧ – أعداد : عدد – ك ، ل –

سطح ب ه وهو قطع ز د ح . ونعمل قطعاً آخر زائداً رأسه نقطه د وسهمه على استقامة ب د ، وكلٌّ واحد من ضلعيه القائم والمائل مثل د ج وهو ط د ح . ولا محالة أن هذا القطع يقطع الأول على د . فإن أمكن أن يلتقيا على نقطه أخرى فالمسألة ممكنة وإلا فهي مستحيلة . وهذا الالتقاء بالتماس أو بالتقاطع على نقطتين ، بناؤه على المقالة الرابعة من كتاب المخروطات ، وقد ضمنّا ألا نحيل إلا على مقالتين منه ، ومع هذا فلا يضرنا ؛ بعد أن التقيا ، سواءٌ كان بالتماس أو بالتقاطع ، فافهم . والالتقاء إما أن يكون بالتماس وإما أن يكون بالتقاطع . فإنْ قطَعه على غير نقطة د فباضطرار يقطعه على نقطتين . وبالجملة فإنا نُخرج من نقطة التقاطع أو الالتقاء كيفما كان — ولتكن نقطة ح — عمودي ح م ك ح ل فيكونان معلومي الوضع والقدر ، لأن نقطة ح معلومة الوضع . فسطح ا ح مثل سطح ا د . ونلقي ه م المشترك ، يبقى م د مثل ه ح . ونجعل د ح مشتركاً فيكون م ل مثل ه ل فأضلاعهما متكافئة وكذلك مربّعات أضلاعهما . فيكون نسبة مربع ا ب إلى مربع ب ل كنسبة مربع ح ل إلى مربع ل د . ولكن نسبة مربع ح ل إلى مربع ل د كنسبة ج ل إلى ل د كما بيّناه مراراً ، فيكون نسبة مربع ا ب إلى مربع ب ل كنسبة ج ل إلى

---

٢ — ب د : ب ج — ك ، ل — // ٥ — وهذا : هذا — با — فا لاهذا — ك ، ل — / أو بالتقاطع : أو التقاطع — ك — والتقاطع — ل — / على نقطتين : ناقصة — ك ، ل — // ٦ — كتاب : ناقصة — ك ، ل — // ٧ — يضرنا : يضر — با — / بعد أن التقيا : ناقصة — با — / التقيا : التقا — ك ، ل — // ٨ — بالتقاطع : التقاطع — ك ، ل — / والالتقاء : ناقصة — ك ، لَ — ٥ ، ٨ — هذا ... فافهم : في الهامش — با — // ٩ — نقطة : مقطعة — ك ، ل — // ١١ — ولتكن : وليكن — ل — / فيكونان : كتبها فيكون ثم صححها عليها وبقي آخرها غير واضح — ك — ونجد في — ل — فيكون من — // ١٢ — الوضع والقدر : القدر والوضع — ك ، ل — // ١٣ — ونلقي : نلقي — ك — يلقي — ل — / د ح : د م — با — // ١٤ — فيكون : يكون — با ، ك ، ل — / أضلاعهما : أضلاعها — با ، ل ، ل — // ١٦ — ولكن : لكن — ك ، ل — / كنسبة ... ل د : في الهامش — ك — / ج ل : ح ل — ك ، ل —

ل د . فالمجسّم — الذي ارتفاعه ل د وقاعدته مربع ا ب — مثلَ المجسّم الذي قاعدته مربع ب ل وارتفاعه ل ج . لكنّ هذا المجسّمَ الأخيرَ مثلُ مكعب ب ل مع المجسم الذي قاعدته مربع ب ل وارتفاعه ب ج ، الذي هو مثل عدة الأموال المفروضة . ونجعل المجسّم — الذي قاعدته مربع ا ب وارتفاعه ب د الذي عملناه — مثلَ العدد المفروض مشتركاً ، فيكون مكعبُ ب ل مع عدد أمواله المفروضةِ ومع العدد المفروض مثلَ المجسّم الذي قاعدته مربعُ ا ب وارتفاعه ب ل الذي هو مثل عدة أضلاع مكعب ب ل المفروضة . وذلك المراد .

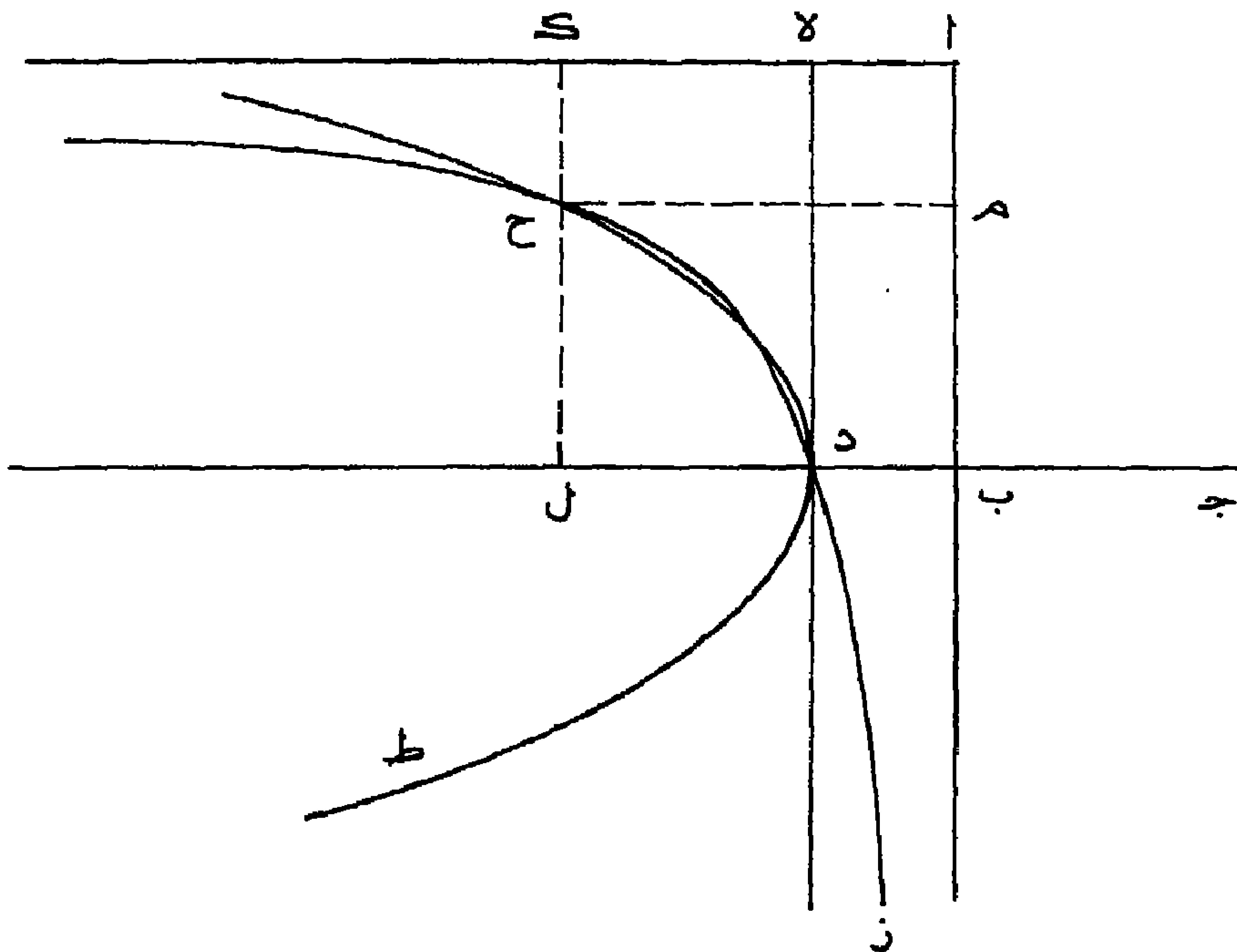
فقد تبين أن هذا الصنف له اختلافُ وقوعات ، وربما يُوجد في مسائله ١٦-ا ضلعان لمكعبين ، وربما يقع فيها ، أعني في مسائله ، / مستحيل وقد خرج بخواص قِطعين زائدين ، وذلك ما أردنا أن نبيّن . *

الصنف الثالث من الأصناف الأربعة الرباعية هو : مكعب وأضلاع وأعداد / تعدل أموالاً :

نفرض خطَّ ب ه لعدة الأموال المفروضة و ب ج ضلعَ مربعٍ مساوٍ لعدة الأضلاع ويكون عموداً على ب ه . ونعمل مجسّماً قاعدته مربعُ ب ج ويكون مساوياً للعدد المفروض . وليكن ارتفاعه ا ب على استقامة ب ه . ونعمل على ا ه نصف دائرة ا ز ه . فنقطة ج إما أن تقع داخل الدائرة ، أو على محيطها ، أو خارجاً منها .

---

٢ — الذي قاعدته : الذي قاعدة — ك ، ل — // ٤ — ب ج : ب ح — ك ، ل —
٦ — مع : هناك إشارة من الناسخ إلى إضافتها في الهامش ولكنها لم تظهر في الصورة التي حققنا عليها — ك — / المفروضة : المفروض — ، ك ، ل — / العدد — عدد — ك ، ل — // ٨ — هو : فوق السطر — ك — // ٩ — يوجد : يؤخذ — ك ، ل — / مسائله : مسئلة — ك ، ل —
١٠ — لمكعبين : المكعبين — ك ، ل — // ١١ — أردنا : ناقصة — ك ، ل — / نبين : تبين — ل — // ١٤ — و ب ج : زب ج — ك — اب ج — ل — // ١٥ — قاعدته : قاعدة — ل — // ١٦ — على : وعلى : ك ، ل ، با — // ١٧ — ا ز ه : ا د ه — ل —
١٨ — تقع : يقع — ل — * انظر الشكل ص ٤٨ .



فلتقع أولا داخل الدائرة . ونخرج ب جـ على استقامة حتّى يقطع الدائرة على ز ، ونتمم سطح ا جـ . ونعمل على ز جـ سطحاً مساوياً لسطح ا جـ وهو جـ ح ، فتكون نقطة ح معلومة الوضع لأن سطح جـ ح معلوم القدر وزواياه أيضاً معلومة القدر وخط ز جـ معلوم الوضع والقدر ، وهي إما أن تقع داخل الدائرة أو على محيطها أو خارجاً منها . فلتقع أولاً داخل الدائرة . ونعمل على نقطة ح قطعاً زائداً لا يلقاه ز جـ جـ م ، فهو يقطع الدائرة على نقطتين باضطرار في هذا الوضع ، فليقطعها على نقطتي ل ن فتكونان معلومتي الوضع . ونخرج منهما عمودي ل ك ن ف على ا هـ ومن نقطة ل عمود ل ط على ب ز .

---

١ – فلتقع : فليقع – ل – // ١ ، ٢ – حتى ... فسطح ا جـ : ناقصة – ك ، ل – // ٣ – فتكون : فيكون – ل – // ٤ – أيضا : اشـا – ك – التى يمكن قراءتها أشياء ولقد نقلها هكذا ناسخ – ل – // ٦ – فلتقع : فليقع – ل – // ٨ – ل : ا – ل – / فتكونان : وتكونان – با – فيكونان – ل – / منهما : منها – با ، ك ، ل – / ن ف : ن و – ك ، ل –

فسطح ل ج مثل سطح ج ح و ج ح مثل ج ا . ونجعل ج ك مشتركاً فيكون د ك مثل ط ك فأضلاعهما متكافئة ، وكذلك مربعات أضلاعهما . لكن نسبة مربع ل ك إلى مربع ك ا كنسبة هـ ك إلى ك ا – للدائرة – . فيلزم أن تكون نسبة مربع ب ج إلى مربع ب ك كنسبة هـ ك إلى ك ا . فالمجسّم الذي قاعدته مربع ب ج وارتفاعه ك ا مثلُ المجسّم الذي قاعدته مربع ب ك وارتفاعه ك هـ . لكنّ المجسّمَ الأولَ مثلُ عدة
١٦-ب أضلاع مكعب ب ك المفروضةِ ومثلُ العدد المفروض . / ونجعل مكعب ب ك مشتركاً ، فيكون المجسمُ – الذي قاعدته مربع ب ك وارتفاعه ب هـ ، الذي هو مثل عدة أموالِ مكعبِ ب ك المفروضة – مثلَ مكعب ب ك مع عدة أضلاعه المفروضة ومع العدد المفروض .

وكذلك يكون مكعب ب ف بهذا البرهان ، هذا إذا وقع نقطتا ج ح داخل الدائرة .

فإن وقع ح خارج الدائرة فنعمل القطع ، فربمّا لقي الدائرة بالتماس أو بالتقاطع ، ويؤول الأمر إلى ما قلنا . وهذا النوع من هذا الصنف هو الذي ذكره أبو الجود في استخراج المسألة التي سنذكرها . وإن لم يلق القـطعُ الدائرةَ فلا نزال نعمل السطح على خطٍ أقصر من ز ج أو أطولَ منه في الوقوع الآخر . فإن لم يلق القـطعُ الدائرةَ فالمسألة مستحيلة ، ويكون البرهان على استحالتها بعكس ما ذكرناه .

---

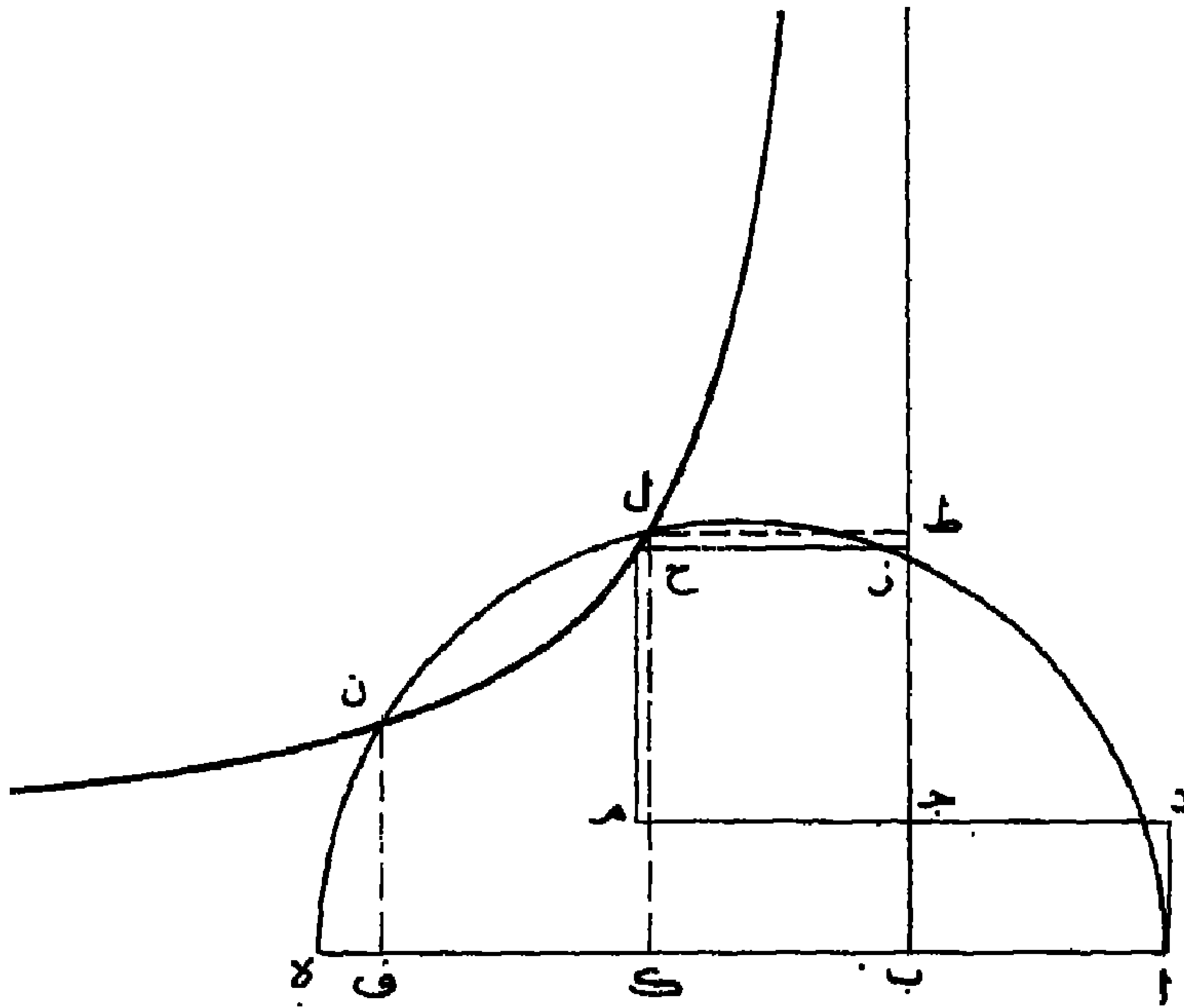
١ – ل ج : تحت السطر – ل – / و ج ح : وخرج – با – // ٢ – فيكون : يكون – ك ، ل ، با – // ٣ – هـ ك : هـ ل – ك ، ل – / للدائرة : لدائرة – ك ، ل – // ٤ – تكون : يكون – ل – // ٥ – ك ا : ك – ك ، ل – / المجسم (الثانية) : ناقصة – ك ، ل – // ٧ – أضلاع : الأضلاع – ك ، ل – / المفروض : المفروض ونجعل مكعب ب ك المفروضة ومثل العدد المفروض – ل – // ٩ – المفروضة : المفروض ك ، ل – // ١١ – وكذلك : ناقصة – ك ، ل – ١٣ – فنعمل : وتعمل – ك ، ل ، با – / فربما : وربما – با – // ١٤، ١٥ – وهذا النوع ... سنذكرها : ناقصة – ك ، ل – في هامش با وبنفس الخط // ١٦ – يلق : يكن – ك ، ل – ١٧ – يلق : يكن – ك ، ل – // ١٨ – استحالتّها : استحالتّهما – ك – استحلتّهما – ل –

وإن وقع جـ على المحيط أو خارج الدائرة فنخرج جـ ز على استقامة ونعمل سطحاً إحدى زواياه تكون على جـ ، ويكون بحيث لو عُمل على الزاوية المقابلة لزاوية جـ قطعٌ بالصفة المذكورة يلقى الدائرة بالتماس أو بالتقاطع . وذلك يُعلم بقليل استقراءٍ مع ضربٍ من القياس السهل ، تركتهُ لكي يحصل للناظر في رسالتي هذه الارتياضُ . فإن من لا يمكنه هذا القدر من الاستنباط لا يُحقّق من هذه الرسالة شيئاً ، إذ هذه الرسالة مبنية على الكتب الثلاثة التي ذكرناها . ونبرهن على استحالة المستحيل منها بعكس البرهان الذي ذكرناه على الممكن ، وذلك أن ضلع المكعب يجب أن يكون أقصر من هـ ب الذي هو عدة الأموال المفروضة ، لأنه إن كان مساوياً لعدة الأموال المفروضة يكون ذلك المكعب مساوياً لعدة أمواله المفروضة فضلاً عن زيادة شيء آخر عليه من العدد ومن أضلاعه ، فإن كان ضلع المكعب أعظم من عدة الأموال المفروضة كان المكعب نفسه أعظم من عدة أمواله المفروضة ، فضلا عن زيادة شيء آخر عليه . فبيّنٌ أنه يجب أن يكون أقصر منه . فنفصل مثله من ب هـ وليكن / ب ف ونخرج من ف عموداً إلى محيط الدائرة ١٧-ا ونعكس البرهان الذي ذكرناه . فبيّنٌ أن رأس العمود يكون على محيط القطع الذي قيل إنه لا يمكن أن يلقى الدائرة . وذلك محال .

ولأجل أنا نظنّ أن هذا الاستقراء ربما يكون عَسِراً على بعض

---

١ – جـ ز : جـ د – ل – // ٢ – تكون : يكون – ل – // ٣ – الزاوية المقابلة لزاوية : الزاوية المقابلة لزاوية المقابلة لزاوية – ك – / الزوايا المقابلة لزاوية المقابلة لزاوية – ل – // ٥ – تركته : مركبة – ك ، ل – // ٦ – يحقق : يتحقق – با – / شيئا : شياء – ل – // ١٠ – لعدة : لعدة الأموال المفروضة يكون ذلك مساويا لعدة – ل – ١١ – فضلا : فاضلا – ك ، ل ، با – // ١٢ – من العدد ومن أضلاعه : من العدد أول من العدد أو من أضلاعه – ك ، ل – / ومن : أو من – با – // ١٤ – فنفصل : فنفصله – ل – ١٥ – ب هـ : ب جـ – ك ، ل ، با – / ب ف : ب و – ك ، ل – / ف : ب – ك ، ل – ١٦ – ونعكس : فيعكس – ك ، ل – // ١٧ – قيل : مثل – با – / وذلك : فذلك – با – ١٨ – عسرا : عثيرا – با –



الناظرين في هذه الرسالة فإنا نطوي هذه الجملة ونأتي بقانون مغنٍ عن هذا الاستقراء ، وهو أنا نعمل سطحاً على خط كيفما أردنا يكونُ على استقامة ب جـ كيفما وقعت جـ خارجاً أو داخلاً ، وتكون إحدى زواياه على نقطة جـ ويكون مساوياً لسطح ا جـ ، فلا بد من أن تصير أضلاعه معلومة القدر والوضع . ونعمل على الزاوية المقابلة لزاوية جـ قطعاً زائداً لا يلقاه خطّا ز جـ جـ م ، وهو الخط الذي هو عمود على < ز جـ على > نقطة جـ . فإن لقي القطعُ الدائرةَ بالتماس أو بالتقاطع فالمسألة ممكنة وإلا فهي مستحيلة . والبرهان على الاستحالة ما ذكرتُ .

وقد اضطر واحد من المهندسين إلى هذا الصنف وقد أخرجه ، إلا أنه

---

١ – نطوي : نطري – ك ، ل – / مغن: مغنى – ك ، ل – // ٢ – يكون : ناقصة – با –
٣ – وقعت : وقعت ، التي يمكن قراءتها « وقف » كما فعل ناسخ ل – / وتكون: ويكون – ل –
٤ – فلا بد : ولا بد – با – / تصير : يصير – ل – // ٥ – زائدا : زائد – ل –
٦ – جـ م : جـ ب – ك ، ل – // ٩ – واحد : واحدا – ل –

لم يبيّن اختلاف وقوعاته ولم يخطر بباله أنه ربما يقع فيه مستحيل كما بيناه ؛ فاعرفه واعرف القانون الأخير في عمل هــذا الصنف وتمييــز الممكن من المستحيل . وهذا الصنف خرج بخواص الدائرة مع خواص القِطع الزائد ، وذلك ما أردنا أن نبيّن .

وأما المسألة التي اضطرّت واحــداً من المتأخرين إلى هــذا الصنف فهي هذه : عشرة قسمتها بقسمين فيكون مجموعُ مربعي القسمين مع الخارج من قسمة الأعظم على الأصغر اثنين وسبعين .

فوضعَ أحــدَ القسمين شيئاً والآخرَ عشرةً إلا شيئاً ، كعادة الجبريين في أمثال هذه القِسمات ، فأدى / العمل إلى مكعبٍ مع خمسةٍ من العدد ، ١٧-ب وثلاثةَ عشر < من > أضلاعه ونصفٍ ، معادلٍ لعشرة أموال . وفي هذه المسألة بعينها تقع نقطتا $\overline{ج ح}$ داخلَ الدائرة . فاستخرج المسألةَ هذا الفاضلُ بعدما أعيت هـذه المسألةُ جماعةً من فضلاء العراق ومنهم أبو سهل القوهي ، إلا أن هذا المُستخرج – مع فضله وعظم قــدره في الرياضيات – لم يخطر بباله هذه الاختلافات و < أن > في مسائل هـذا الصنف ما يستحيل . وهذا الفاضل هو أبو الجود أو الشنّي والله أعلم .

الصنف الرابع من الأصناف الأربعة الرباعية هو : أعداد وأضــلاع وأموال تعدل مكعباً .

نفرض $\overline{ب ه}$ ضلع مربع مثل عــدة الأضلاع ، ونعمل مجسّماً

---

١ – وقوعاته : وقوعا – با – // ٢ – فاعرفه : فاعرف – ك ، ل – / الأخير : الآخر – ك ، ل – // ٢ ، ٣ – وتمييز ... وهذا : ناقصة – ل – // ٥ – واحداً : واحد – ك – / فهي : هى – ك ، ل ، با – // ٦ – بقسمين : قسمين – ك ، ل – // ٨ – إلا : ناقصة – ل – / كعادة : أولها مطموس – با – // ٩ – هذه : تحت السطر – با – / فأدى : فادا – ك – فإذا – ل – // ١٠ – معادل : يعادل – ك ، ل – // ١١ – هذه : ناقصة – ك ، ل – // ١٢ – ومنهم : منهم – ك ، ل – ومسهم – با – // ١٣ – القوهي : القوهي رحمهم الله – ك ، ل – / المستخرج : المستخرج رضي الله عنه – ك ، ل – / في : هى – ك ، ل – ١٥ – والله أعلم : ناقصة – با –

قاعدته مربع ب ه ويكون مساوياً للعــدد المفروض ، وليكن ارتفاعــه اب عموداً على ب ه . ونفرض ب ج لعــدة الأموال المفروضة عــلى استقامة اب ونتمم اه ونخرج على اســتقامة ه ب ه م كيفما كــان مقداره . ونعمل على ه م المفروض سطحاً مثل اه وهو سطح ه ح ، فتكون نقطة ح معلومة الوضع . ونعمل على ح قطعاً زائداً لا يلقــاه ه م ه س وهــو ح ط ك فيكون معلوم الوضع . ونعمل قطعاً آخــر زائداً رأسه نقطة ج وسهمه على استقامة ب ج وكل واحد من ضلعيه القائم والمائل مثل اج وهو قطع ل ج ط فيكون معلوم الوضع ويقطــع لا محــالة قطــع ح ط ك ، فليقطعــه على نقطــة ط ، فتكــون ط معلومة الوضع . ونُخرج منها عمودي ط د ط ن على ب ج ب م ، فيكونان معلومي القــدر والوضــع و ط ه مثــل ه ح الذي هــو مثل ه ا ، ونجعل ه ن مشتركاً ، فيكون ا س مثــل ط ب فأضلاعهمــا متكافئة وكذلك مربعات أضلاعهما . لكن نسبة مربع ط ن إلى مربــع ا ن كنسبة ن ج إلى ا ن كــا بيناه مرارا لما كان قطع ل ج ط . فنسبة مربع ب ه إلى مربع ب ن كنســبة ن ج إلى ن ا ، فالمجســم الــذي قاعدته مربع ب ه وارتفاعه ا ن مثلُ المجسم الذي قاعدته مربــع ب ن

١٨-ا وارتفاعه ج ن . لكن الأول مساوٍ للمجسم الذي / يحيط به مربع ب ه وارتفاع اب الــذي عملناه مساوياً للعــدد مع المجسم الذي قاعــدته

---

١ – قاعدته : قاعدة – ك ، ل – // ٢ – اب : اب على – ل – // ٣ – ونتمم : ونتم – ك ، ل – / ونخرج : ناقصة – ل – // ٤ – ونعمل فنعمل – با – / ه ح : اح – ل – ٥ – فتكون : فيكون – ل – / ح : ناقصة – ل – / قطعا : قطعان – ل – / زائدا : زائد – ل – / لا : ناقصة – ك ، ل – // ٦ – ه س : ه ز – ك ، ل ، با – / آخر : آخرا – ل – ٨ – القائم والمائل : المائل والقائم – با – / فيكون : ويكون – ك ، ل ، با – / ويقطع : وتقطع – ل – // ٩ – فتكون : فيكون – ل – // ١٠ – ط د : ناقصة – با – / ب ج : ب ح – ك ، ل – // ١٢ – ط ب : ط ي – ل – / فأضلاعهما : فأضلاعها – ك – ١٤ – ن ج : ز ح – ك ، ل – ز ج – با – // ١٥ – ن ج : ىح – با – / فالمجسم : ولمجسم – با – // ١٥، ١٦ – الذى قاعدته : كتبها ناسخ ك أولا : الذى عملناه قاعدته « ثم حذف بخط خفيف « عملناه » ولقد نقلها ناسخ ل هكذا بدون الحذف // ١٦ – ب ن : ب ز – با –

مربع ب هـ وارتفاعه ب ن الذي هـو مثل عـدة أضلاع مكعب ب ن المفروضة . فنجعل المجسم – الذي قاعدته مربع ب ن وارتفاعه ب ج الذي هـو مثل عـدة الأموال المفروضـة لمكعب ب ن – مشتركاً ، فيلزم أن يكون مكعب ب ن مثل عدة أمواله المفروضة مع عدة أضلاعه المفروضة ومع العدد المفروض ، وذلك ما أردنا أن نبيّن .

وليس لهذا الصنف اختلاف وقوعٍ ولا في مسائله ما يستحيل .

< معادلات الدرجة الثالثة المركبة من اربعة حدود – ٢ – >

وإذ قد أتينا على الأصناف الأربعة الرباعية ، فلننقل على الأصناف الثلاثة التي كل واحد منها مركب من اثنين يعادلان اثنين :

---

١ – هو : فوق السطر – ل – / ب ن (الأولى والثانية) : ب ز – با – // ٢ – ب ج : ب ح – ك ، ل – // ٣ – ب ن : ب ز – با – // ٤ – ب ن : ب ز – با – ٦ – وليس : و – ك ، ل – / ما يستحيل : ناقصة – ك ، ل – // ٨ – الأصناف : أصناف – ك ، ل – / الأصناف : أصناف – ك ، ل – // ٩ – الثلاثة : الثلاثية – ك ، ل –

الصنف الأول من الأصناف الثلاثة الرباعية الباقية هو مكعب وأموال تعدل أضلاعاً وعدداً .

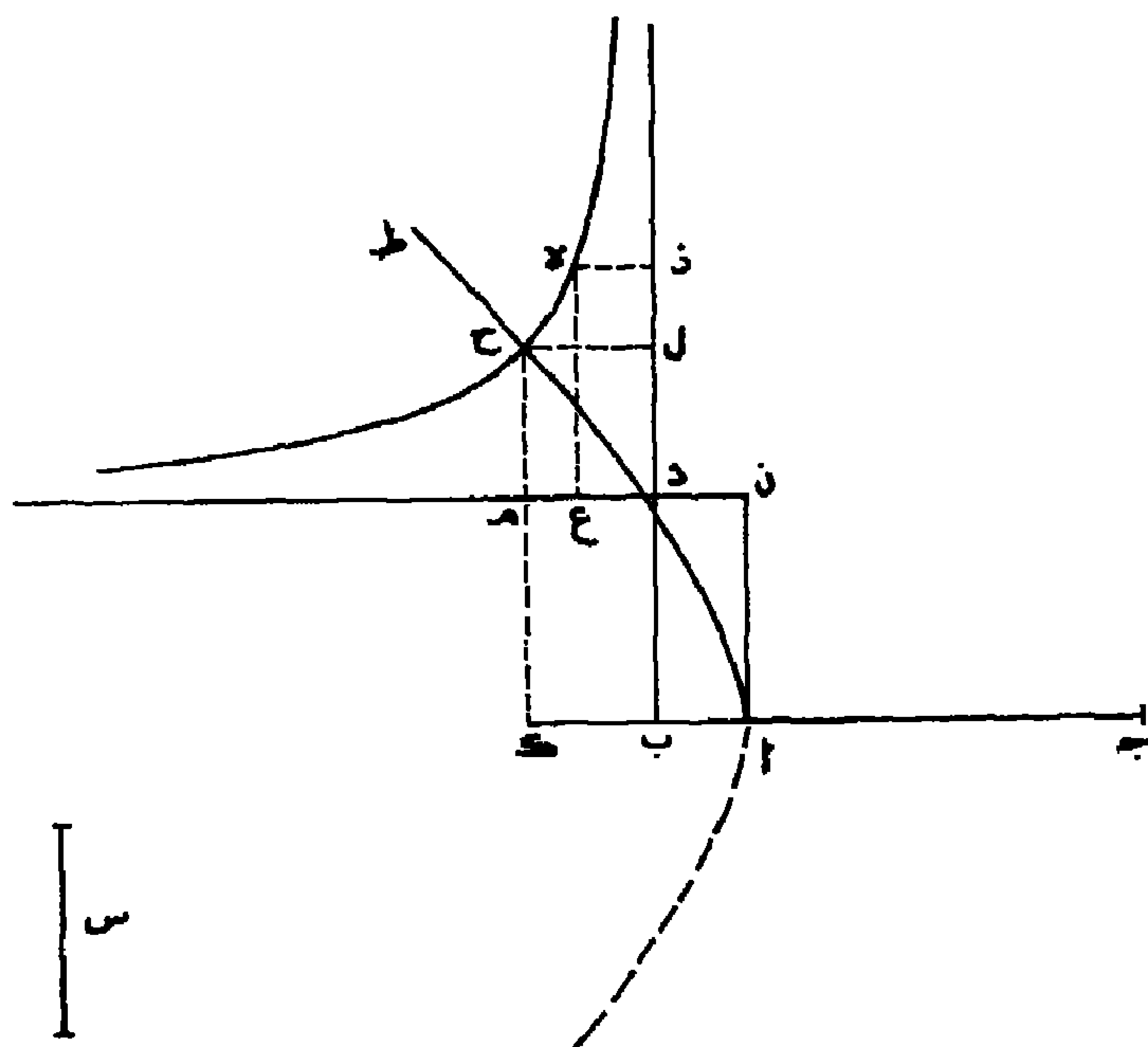
نضع ب د ضلع مربع مساوٍ لعدة الأضلاع و جب لعدة الأموال المفروضة وهو عمود على ب د ، ونعمل مجسماً قاعدته مربع ب د ويكون مساوياً للعدد المفروض ، وليكن ارتفاعه س ، فخط س إما أن يكون أعظم من ب ج ، أو أصغر منه ، أو مساوياً له .

فليكن أولا أصغر منه . ونفصل من ب ج ا ب مثل س ، ونتم ا د . ولنفرض د ز على استقامة ب د كيفما وقع . ونعمل على د ز سطحاً مثل ا د وهو ه د . فتكون ه معلومة الوضع وأضلاع سطح ه د كلها معلومة الوضع والقدر . ونعمل على ه قطعاً زائداً لا يلقاه ز د / د ع ١٨-ب وهو قطع ه ح فيكون ه ح معلوم الوضع . ونعمل قطعاً آخر زائداً رأسه نقطة ا وسهمه ا ب وكل واحد من ضلعيه ، القائم والمائل ، مثل ا ج وهو قطع ا ح ط فهو يقطع القطع الآخر باضطرار . فليقطعه على ح ، فتكون ح معلومة الوضع ، ونخرج منها عمودي ح ك ح ل فيكونان معلومي الوضع والقدر وسطح ح د مثل ه د الذي هو مثل ا د ، و د ك مشترك ، فسطح ح ب مثل ا م وتكون أضلاعهما متكافئة وكذلك مربعات أضلاعهما . لكن نسبة مربع ح ك إلى مربع ك ا كنسبة ج ك إلى ا ك لما كان قطع ا ح ط كما بيناه مراراً . فيكون نسبة مربع ب د إلى مربع ك ب كنسبة ج ك إلى ا ك ، فالمجسم الذي

---

٣ — ب د : ا ب د — ك ، ل — // ٥ — مساويا : مساو — ك ، ل — / ٦ — مساويا : مساو — با — // ٧ — من : ناقصة — با — // ٨ — ب د : د — با — // ٩ — فتكون : فيكون — ل — // ١٠ — يلقاه : تلقاه — ل — // ١١ — وهو قطع : فوق السطر — ك — ١٢ — القائم والمائل : المائل والقائم — با — // ١٣ — الآخر : « خر » تحت السطر — ك — / باضطرار : ناقصة — ك ، ل — // ١٤ — فتكون : ناقصة — ك ، ل — // ١٥ — ه د : هذا — با — // ١٦ — ام : ا ه — ك ، ل — / وتكون : ويكون — ل — // ١٧ — إلى : ال — با —

قاعدتــه مربّع ب د وارتفاعه ا ك مثل المجسم الذي قاعدته مربع ب ك وارتفاعه جـ ك . لكن هذا المجسم الأخير مثل مكعب ب ك مع المجسم الذي قاعدته مربع ب ك وارتفاعــه ب جـ الذي هـــو عدة الأمــوال المفروضة . والمجسم الأول مساوٍ للمجسم الذي قاعـــدته مربـــع ب د وارتفاعه ا ب الذي عملناه مثلَ العدد المفروض مع المجسم الذي قاعدته مربع ب د وارتفاعه ب ك الذي هو عـدة أضلاع مكعب ب ك المفروضة . فمكعب ب ك مع عدة أمواله المفروضة مثلُ العدد المفروض مع عـــدة أضلاعه المفروضة ، وذلك المراد .



---

١ – قاعدته : ناقصة – ك ، ل – ونجد في ك مكانها علامة تنبه إلى زيادة في الهامش . ولقد نسي الناسخ هذه الإضافة بعدما أشار إليها – / ب د : ب ك – ك، ل – / ا ك : جـ ك – ك ، ل – من الواضح أن ناسخ – ك – قد كرر الجملة الثانية مكان الأولى، فكتب بدلا من «الذى قاعدته مربع ب د وارتفاعه ا ك » العبارة الثانية «الذي قاعدته مربع ب ك وارتفاعه جـ ك » ولقد تبعه في هذا ناسخ ل –
٢ – ب ك : ز ك – با – // ٣ – مربع : فوق السطر – ك – / ب جـ : ب ح – ك ، ل –
٥ – المجسم : مجسم – ل – // ٧ ، ٨ – مثل ... المفروضة : مكررة – ك، ل –

وإذا كان س مثل ب ج فإن ب د هو ضلع المكعب المطلوب .

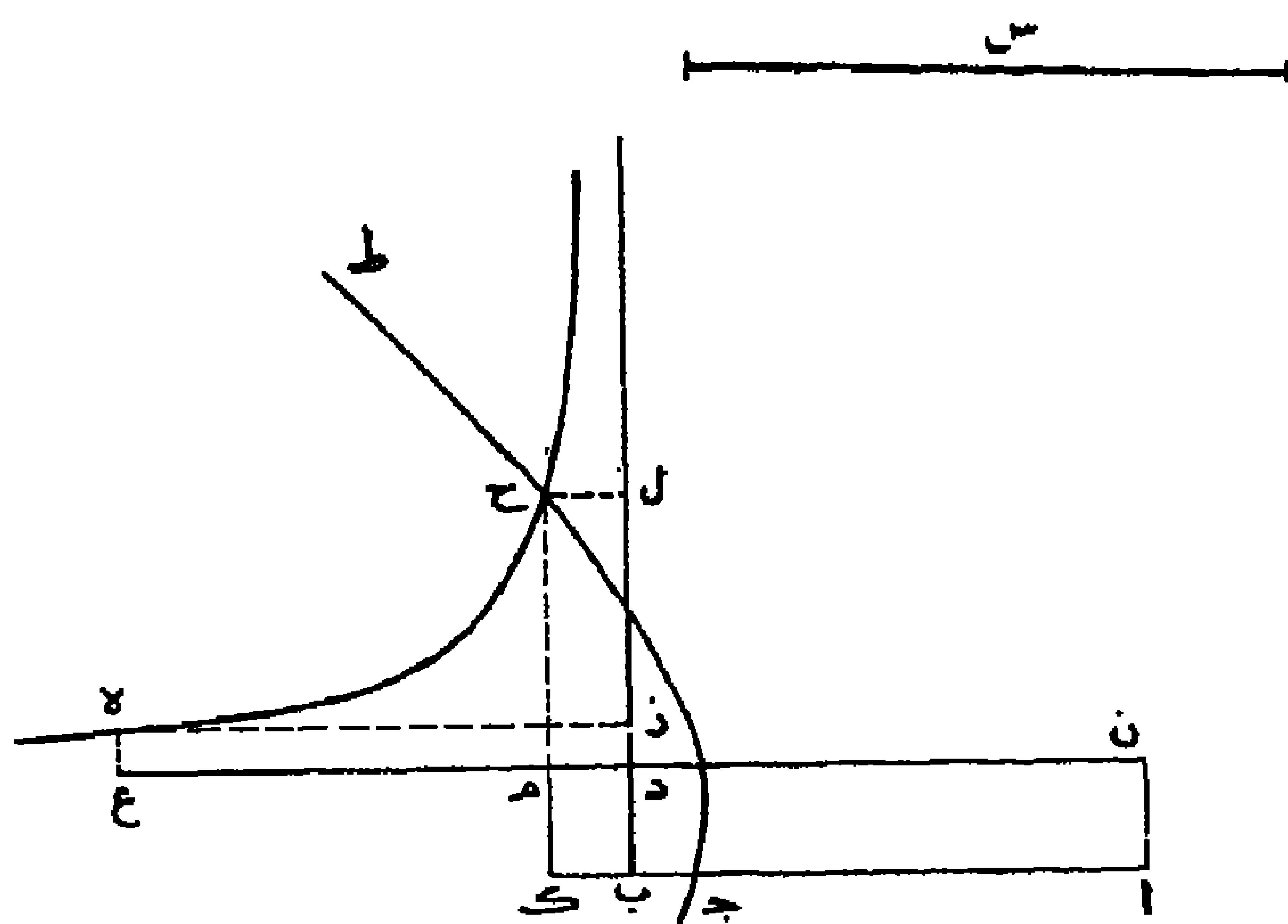
١٩-ا برهانه : إن المجسم – الذي قاعدته مربع ب د / وارتفاعه ب د أيضاً الـذي هو عـدة أضلاع مكعب ب د – مساوٍ لمكعب ب د . والمجسم – الذي قاعـدته مربع ب د وارتفاعه ب ج الذي هـو عـدة أمـوال مكعب ب د المفروضة – مساوٍ للمجسم الذي قاعدته مربـع ب د وارتفاعه س الذي هو العدد المفروض ، فيكـون مكعـب ب د مع عدة الأموال المفروضة مساوياً للعدد المفروض مع عـدة أضلاعـه المفروضة ، وذلك المراد .

ومعلوم أن مكعب ب د في هـذا الوقوع مع العدد المفروض مسـاوٍ لعدة أمواله المفروضة مع عـدة أضلاعه المفروضة . فقد داخل هـذا الصنفُ الصنفَ الثالث وهو مكعب وأعداد تعدل أموالا وأضلاعـاً . وإن كان س أعظم من ب ج فإنا نجعل ا ب مثل س ونعمل القِطـع الثاني على نقطة ج ، وكل واحد من ضلعيه مثل ا ج ، وهو باضطرار يقطع القِطع الآخر ويكون ضلع المكعب أيضا ب ك ، وباقي العمـلِ والبرهانِ شبيهٌ بما تقدم ، إلا أن نسبة مربع ح ك إلى مربع ك ا كنسبة ا ك إلى ك ج .

فقد تبين أنّ لهذا الصنفِ اختلافَ وقوعاتٍ وأنواع ، وأحد أنواعـه يداخل الصنف الثالث ، وليس في مسائله مستحيل ، وقد خرج بخواصّ قطعين زائدين .

---

١ – س : فوق السطر – ك – / هو : مثل هو – ك ، ل – // ٢ – ب د أيضا : ا ب أيضا – ك ، ل – // ٣ – أيضا ب د – با – // ٤ – والمجسم : المجسم – ك ، ل – / قاعدته : قاعدة – ك ، ل – // ٧ – مساويا : مساو – ك ، ل ، با – // ١١ – الصنف (الثانية) : لصنف – ل – // ١٢ – مثل : قمل – با – // ١٣ – ج : ه ح – با – / ا ج : ا ح – با – // ١٤ – يقطع : يقع – ك ، ل ، با – // ١٦ – ك ج : د ك – ك ، ل – ١٧ – وأنواع : ناقصة – با – // ١٨ – يداخل : يدخل – ل –



الصنف الثاني من الأصناف الثلاثة الرباعية الباقية ، وهو : مكعب وأضلاع تعدل أموالاً وأعداداً .

نضع ب ج لعدة الأموال المفروضة و ب د ضلعَ مربع مثل عدة / الأضلاع عموداً على ب ج ونعمل مجسّماً مساوياً للعدد المفروض ، ١٩-ب وتكون قاعدته مربع ب د وليكن ارتفاعه س . فخط س إما أن يكون أصغر من ب ج ، أو مثله ، أو أعظم منه .

فليكن أولا أصغر منه . ونفصل من ب ج ب ا مثل س ونتم ا د ونعمل على قطر ا ج دائرة ا ك ج فتكون معلومة الوضع . ونعمل على نقطة ا قطعاً زائداً لا يلقاه ب د د ز وهو قطع ح ا ط فيكون معلوم الوضع ، و ح ا ط يقطع ا ز المماسّ للدائرة ، فهو يقطع الدائرة : لأنه لو وقع بينها وبين ا ز أمكننا أن نخرج من نقطة ا خطاً يماسّ القطع كما

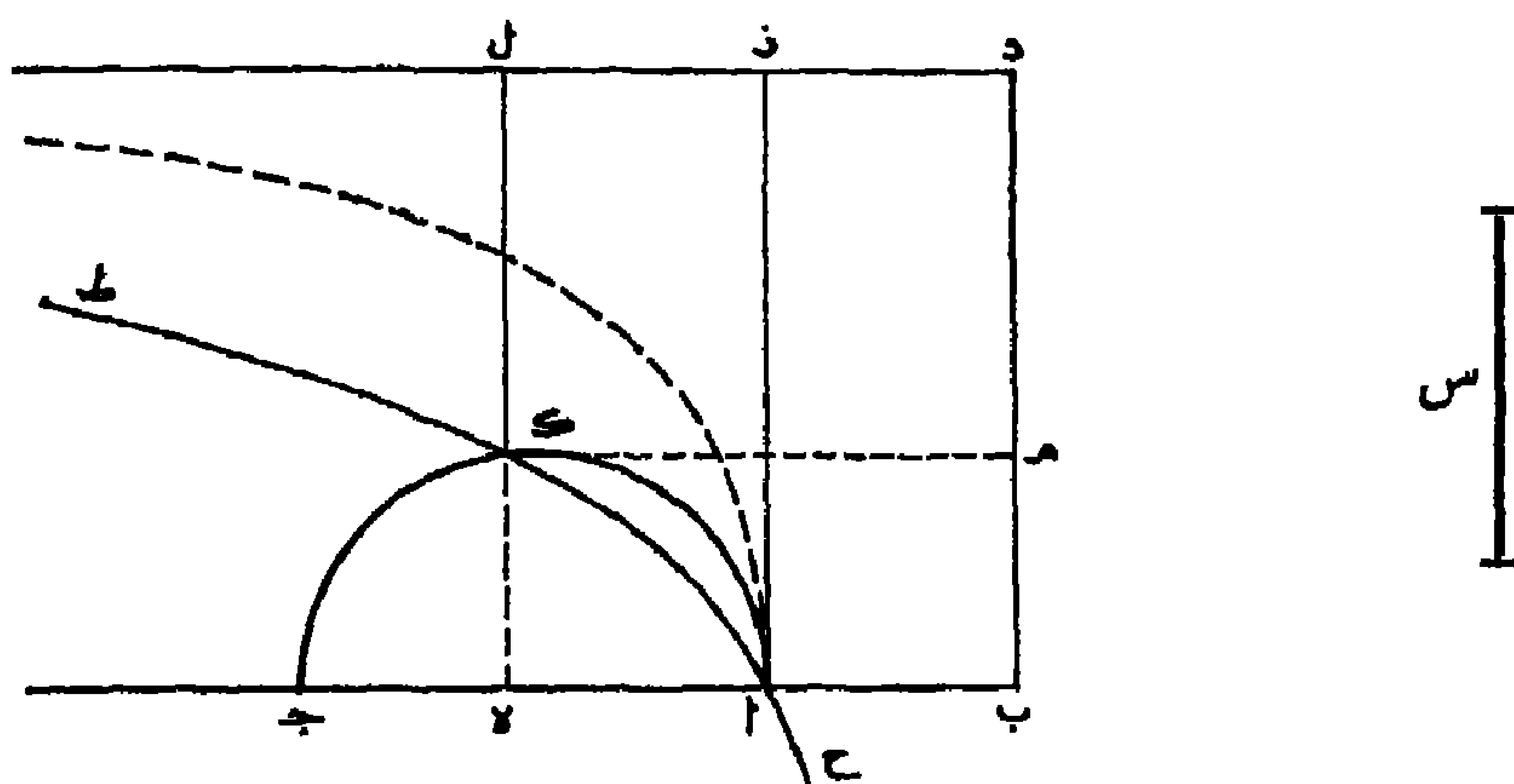
---

٣ – ب ج : ب ح – ك ، ل – // ٤ – ب ج : ب ح – ك ، ل – // ٥ – وتكون : ويكون – ل – / وليكن : وليكون – ك ، ل – // ٧ – أولا أصغر : كتبها أصغر ثم صححها عليها – ل – / ونفصل : ونفضل – با – / ونتم : ويتم – ل – // ٨ – فتكون : فيكون – ك – // ٩ – فيكون : ويكون – ك ، ل ، با – // ١٠ – الدائرة : للدائرة – ل – ١١ – بينها : بينهما – ك ، ل – / أمكننا : يمكننا – ك ، ل –

بينه أبلونيوس في شكل س من مقالة ب . فذلك الخط إما أن يقع بين ا ز والدائرة وذلك محال ، وإما أن يقع خارج ا ز فيكون ا ز خطاً مستقيماً واقعاً بين القطع وبين ذلك الخط المماسّ ، وذلك محال . فليس يقع قِطع ط ا ح بين الدائرة وبين ا ز فهو إذن يقطعها ، ويقطعها باضطرار على نقطة أخرى . فليقطعها على ك ، فتكون ك معلومة الوضع . ونخرج منها عمودي ك م ك ه على ب ج ب د فيكونان معلومي الوضع والقدر كما عرفته ، ونتم سطح ك د . فسطح ا د مثل سطح ك د ونلقى م ز المشترك ونجعل ا ك مشتركاً ، فيكون ب ك مثل ا ل ، فأضلاعهما متكافئة وكذلك مربعات أضلاعهما . لكن نسبة مربع ك ه إلى مربع ه ا كنسبة ه ج إلى ه ا ، فيكون نسبة مربع ب د إلى مربع ب ه كنسبة ج ه إلى ه ا . فالمجسّم الذي قاعدته مربع ب د وارتفاعه ه ا مثل المجسم الذي قاعدته مربع ب ه وارتفاعه ج ه . ونجعل مكعب ب ه مشتركاً ، فيكون المجسم الذي قاعدته مربع ب ه وارتفاعه ب ج مثل مكعب ب ه مع المجسم الذي قاعدته ٢٠-ا مربع ب د وارتفاعه ه ا ؛ لكن المجسم الأول مثل / عدة أموال مكعب ب ه المفروضة . ونجعل المجسم — الذي قاعدته مربع ب د وارتفاعه ب ا الذي عملناه مساوياً للعدد المفروض — مشتركاً ، فيكون مكعب ب ه مع المجسم — الذي قاعدته مربع ب د وارتفاعه ب ه الذي هو عدة أضلاع مكعب ب ه المفروضة — مثلَ عدة أمواله المفروضة مع العدد المفروض ، وذلك المراد .

---

٢ — بين : من — ك ، ل — // ٤ — قطع ط ا ح : خطط ا ح — ك ، ل — ومن الملاحظ أن ناسخ ل نقلها كما هي — / إذن : إذاً — ك ، ل — // ٥ — فتكون : فيكون — ل — ٦ — ب د : ناقصة — با — // ٧ — ك د : ك ج — ك ، ل — // ٨ — ونلقى : ويلقى — ل — ١١ — فالمجسم : والمجسم — با — // ١٢ — ه ا : ا — ك ، ل — // ١٣ — ج ه : ه ج — ك ، ل — // ١٤ — ب ج : ج ب — ك ، ل — // ١٥ — ب د : — ب ج — با — ١٨ — ب د : د — ك ، ل —



وإن كان س مثل ب جـ فإن ب جـ هو ضلع المكعب المطلوب .

برهانه : إن مكعب ب جـ مثل عدة أمواله المفروضة ، والمجسم الذي ارتفاعه ب جـ وقاعدته مربع ب د هو مثل العدد المفروض ، وهو أيضاً مثل عـــدة أضلاع مكعب ب جـ المفروضة . فمكعب ب جـ مـــع عدة أضلاعه المفروضة مساوٍ لعدة أمواله المفروضة مع العدد المفروض . فكذلك هذا النوع يداخل الصنف الثالث ، لأن عـــدة أضلاع مكعـــب ب جـ المفروضة هي مثل العدد المفروض ، فيكون مكعب ب جـ مـــع العدد المفروض مساوياً لعدة أمواله المفروضة مع عدة أضلاعه المفروضة .

وإن كان س أعظم من ب جـ فإنا نجعل ب ا مثل س ونعمـــل الدائرة على قطر ا جـ ، والقـطع على نقطة ا يقطع الدائرة على ك كمـــا بيناه . ونخرج من نقطة ك عمودي ك هـ ك م كمـــا فعلناه في الشـــكل المتقدم ، فيكون هـ ب هو ضلع المكعب المطلوب .

---

٢ — والمجسم : المجسم — ك ، ل — // ٣ ، ٤ — هو : وهو — با — / العدد ... مثل : في الهامش — ك — // ٤ — ب جـ : ب د — ك ، ل — / فمكعب : لمكعب — ك ، ل — ٦ — فكذلك : وكذلك — ك ، ل — / يداخل : يدخل — ك ، ل — // ٧ — هي : هو — ك ، ل ، با — ٩ — نجعل : نجعل من — ل — // ١١ — نقطة ك : نقطتي ك — ك ، ل — ١٢ — المتقدم : المقدم — ل —

والبرهان عليه كما تقــدم . نلقي سطح ه د المشترك ، فيكون أضــلاع
ه م ه ز متكافئة ، وكذلك مربعاتها ، فيكون البرهان بعينه كما تقــدم
لا يتغير منه شيء .

٢٠ـ ب فقد تبيّن أن لهــذا الصنف اختلافَ وقوعاتٍ / وأنواع . ونوعٌ منها
يداخل الصنف الثالث وليس في مسائله مستحيلٌ ، وقد خرج بخــواصّ ٥
الدائرة وقطع زائد .

الصنف الثالث من الأصناف الثلاثة الرباعية الباقية هو مكعب وأعــداد تعدل أضلاعاً وأموالاً .

نفرض ب ج لعدة الأمــوال و ب د عموداً عليه وهــو ضلــع
مربع مساوٍ لعــدة الجذور ، ونعمل جسماً قاعــدته مربع ب د ويكون

---

١ – نلقى : يلقى – ل – / فيكون : ويكون – با – // ٢ – البرهان : ناقصة – با –
٤ – وقوعات : وقوع – ك ، ل – // ٥ – يداخل : تداخل – ل – // ٨ – تعدل :
يعدل – ل – // ١٠ – ب د : ب ه د – با –

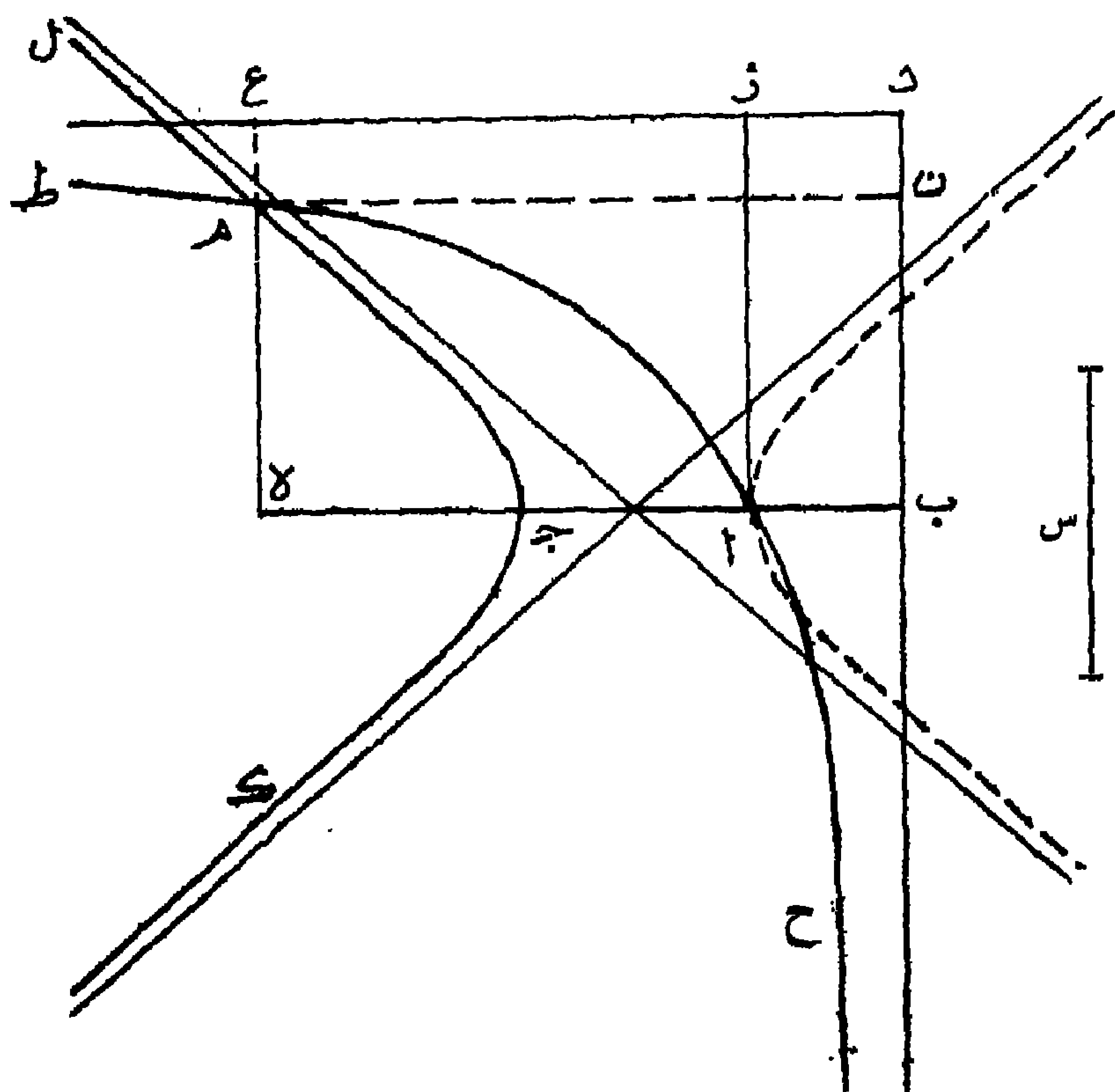
مساوياً للعدد المفروض ، وليكن ارتفاعه س . فخط س إما أن يكون أصغر من ب ج ، أو مثله ، أو أعظم منه .

وليكن أولا أصغر منه : وتفصل من ب ج ب ا مثل س ونتم ب ز ونعمل على نقطة ا قطعاً زائداً لا يلقاه ب د د ز وهو قطع ح ا ط . ونعمل قطعاً آخر زائداً رأسُه نقطة ج وسهمه على استقامة ب ج ؛ وكل واحد من ضلعيه ، القائم والمائل ، مثل ا ج ، فهو لا محالة يقطع القطع الآخر وهو ك ج ل . فليتقاطع قطع ك ج ل وقطع ح ا ط على نقطة م ، فتكون نقطة م معلومة الوضع لأن القطعين معلوما الوضع ، ونخرج منها عمودي م ن ه م ع فيكونان معلومي الوضع والقدر . فسطح د ا مثل سطح د م ويكون ن ه مثل ز ه على ما بيناه مراراً ، فأضلاعهما متكافئة وكذلك مربعات أضلاعهما . لكن نسبة مربع م ه إلى مربع ه ا كنسبة ج ه إلى ه ا ، لقطع ك ج ل ، فيكون نسبة مربع ب د إلى مربع ب ه كنسبة ج ه إلى ه ا . فالمجسم الذي قاعدته مربع ب د وارتفاعه ه ا مثل المجسم الذي قاعدته مربع ب ه وارتفاعه ج ه . ونجعل المجسم — الذي قاعدته مربع ب ه وارتفاعه ب ج الذي هو عدة أموال مكعب ب ه — / مشتركاً ، فمكعب ب ه مثل ٢١-أ
عدة أمواله المفروضة مع المجسم الذي قاعدته مربع ب د وارتفاعه ه ا . ونجعل المجسم — الذي ارتفاعه ب ا وقاعدته مربع ب د الذي عملناه مساوياً للعدد المفروض — مشتركاً ، فيكون المجسّم — الذي قاعدته

---

٣ — ب ج : ب ح — ك ، ل — / ونتم : ويتم — ل — / ب ز : ب د — با ، ل — // ٤ — يلقاه ب د د ز : يلقا ه ب د د ز — ل — // ٥ — آخر : آخرا — ل — / ج : ح — با — / ب ج : ب ح — ك ، ل — // ٧ — ح ا ط : ا ط — ك ، ل — // ٨ — فتكون : فيكون — ل — / معلومة : معلوم — ك ، ل — // ٩ — منها : منهما — ك ، ل — / م ن : م ن ا — ك ، ل — / الوضع : ناقصة — يا — // ١٠ — فسطح — بسطح — با — / مثل ز ه : في الهامش — ك — // ١٢ — م ه : م ز ه — ك — م د ه — ل — / ج ه : ج د — ك — ه د — ل — ١٣ — ب د : ناقصة — ك ، ل — // ١٤ — الذي : فالذي — با — // ١٧ ، ١٨ — وارتفاعه... مربع ب د : ناقصة — ك ، ل —

مربع ب د وارتفـاعه ب هـ الذي هـو مثل عـدة أضلاع مكعب ب هـ المفروضة مع عـدة أموال مكعب ب هـ المفروضة — مساوياً لمكعب ب هـ مع العدد المفروض .



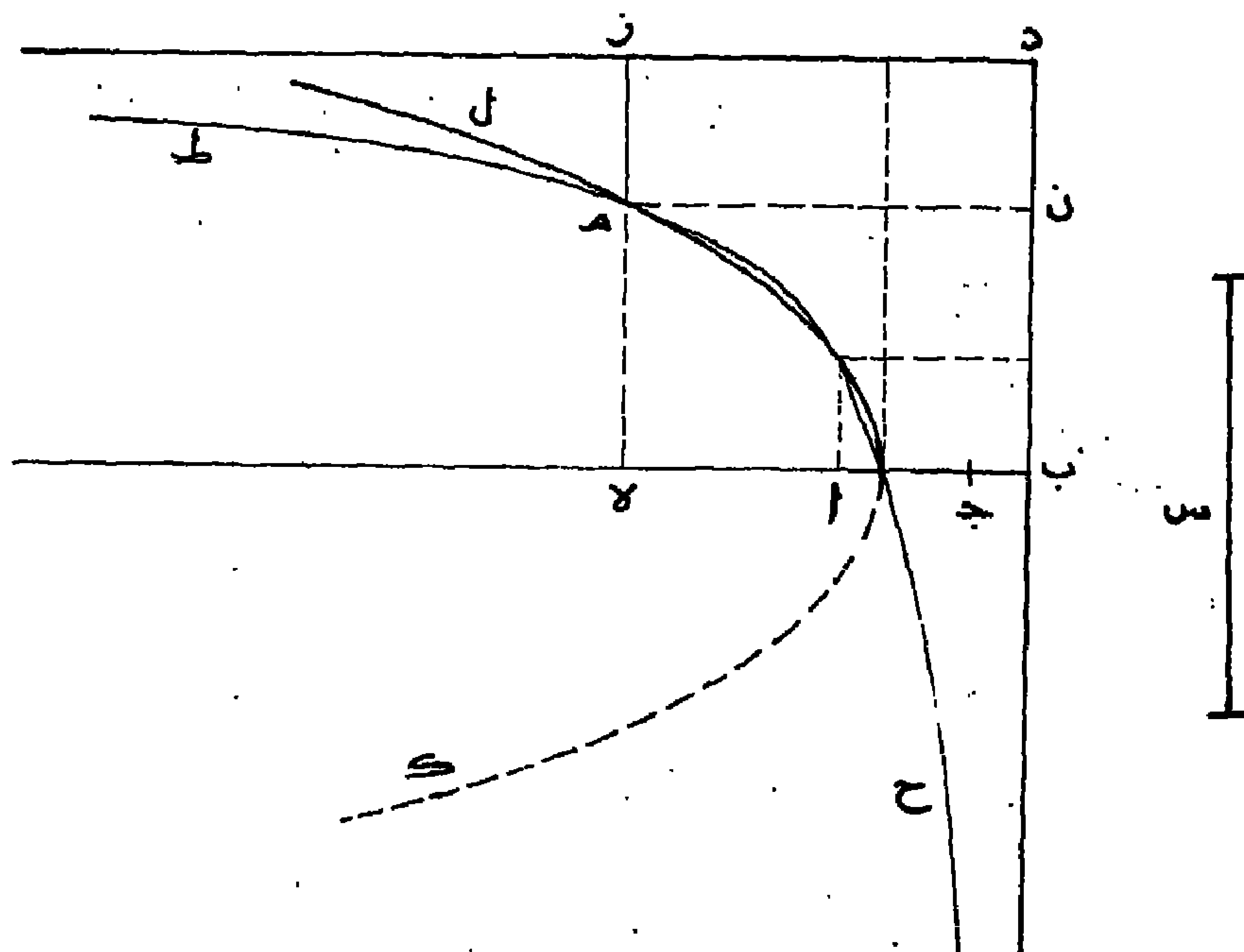
وإن كان س مثل ب جـ فإن ب جـ هو ضلع المكعب <المطلوب> .

برهانه : إن مكعب ب جـ مثلُ عـدة أمواله المفروضة ، والعددَ المفروضَ يكون مساوياً لعدة أضلاع مكعب ب جـ المفروضة . فمكعب ب جـ مع العدد المفروض مثل عدة أمواله المفروضة مع عـدة أضلاعـه المفروضة وذلك المراد .

---

٦ — المفروض : المفروضة — ك — // ٧ — عدة أمواله المفروضة مع : ناقصة — با —
٨ — وذلك : فوق السطر — ك —

ويكون أيضا مكعب ب‌جـ مع عدة أضلاعه المفروضة مثل عدة أمواله المفروضة مع العدد المفروض . فقد داخل هذا النوعُ الصنفَ الثاني . وإن كان س أعظم من ب‌جـ فإنا نجعل ب‌ا مثل س ونتمم السطح ، ونعمل القطع الأول على ا والثاني أيضا على ا وهما متقاطعان . فإن التقيا مرة ثانية إما بالتماس فعلى نقطة واحدة ، وإما بالتقاطع فعلى نقطتين ، كما هو معروف من مقالة د من كتاب المخروطات ، فالمسألة ممكنة وإلا فهي مستحيلة . فإن تقاطعا فنخرج من نقطتي التقاطع عمودين يفصلان ضلعين لمكعبين . والبرهان عليه كما تقدم ، لا يتغير منه شيء . فبيّن أن لهذا الصنف أنواعاً وبعضها مستحيل ، وقد خرج / بخواص ٢١-ب قطعين زائدين .



١ – عدة – ناقصة – ك ، ل – // ٣ – ونتمم : ونتم – ك ، ل – // ٦ – د : هـ – ل –
٧ – فإن : وإن – با – // ٨ – يفصلان: يفصل – ك ، ل ، با – / لمكعبين : المكعبين – ك ، ل – / شيء : شيّ – ك – كتبها ناسخ ل أولا شيء ثم عاد فكتبها عليها شيّ –

وتبيّن أن هذه الثلاثة الأصناف الرباعية متداخلة ، أي : يوجد نوع من الأول يكون هو بعينه نوعاً من الثاني ، ويوجد نوع من الثاني هو نوع من الثالث ، ويوجد نوع من الثالث هو بعينه نوع من الثاني كما بيناه .

< المعادلات التي تحتوي على عكس المجهول >

وإذ قد أتينا على الأصناف الخمسة والعشرين من مقدمات الجبر والمقابلة واستوفيناها حق الاستيفاء ، وحصّلنا أنواع كل صنف منها ، وأعطينا القانون في معرفة الممكن من المستحيل في مسائل ما يقع فيه المستحيلات ، وبينّا أن أكثرها لا يقع فيه المستحيلات ، فلنقل على أجزائها .

جزء الشيء هو عددٌ نسبتهُ إلى الواحد كنسبة الواحد إلى ذلك الشيء . فإن كان الشيء ثلاثة كان جزْؤه ثلثاً ، وإن كان الشيء ثلثاً كان جزؤه ثلاثة . وكذلك إن كان أربعة كان جزؤه ربعاً ، وإن كان ربعا كان جزؤه أربعة . وبالجملة فإن جزء كل عدد هو الجزء السَّمِيُّ لذلك العدد ، كالثلث من الثلاثة إن كان العدد صحيحاً ، والثلاثة من الثلث إن كان العدد كسراً .

---

٣ – هو : وهو – ك ، ل – / الثاني : ٢ – با – // ٦ – الأصناف : أصناف – ك ، ل – ٨ – القانون : للقانون – ك – // ٩ – المستحيلات : يعقبها في ك « فقد حان لنا أن نختم هذه الرسالة / حامدين الله تعالى مصلين على خير الأنبياء محمد وآله أجمعين ، وإذ تأتي هذه الأصناف » مع ملاحظة أن « وإذ تأتي » قد كتبت أولا « وإذن كما » ثم صححت بيد الناسخ فطمست بعض الشيء . ونجد في ل نفس العبارة السابقة مع « وإذن كما أتى »
هنا أيضا تبدأ مخطوطة ن . ولكن الناسخ قد قدم فقرة أخرى سنجدها في آخر الرسالة حسب ك ، با – ونجد في ن « وإذ تكلمنا في هذه الأصناف » بدلا من كل الفقرة « وإذ قد أتينا ... المستحيلات »
١١ – الشيء : التي – با – / كنسبة الواحد : ناقصة – با – // ١٢ – ثلاثة – ٣ – با – ١٣ – أربعة : ٤ – با – // ١٤ – أربعة : ٤ – با – // ١٥ – صحيحا : كتبها صححا ثم كتب الصواب فوقها – ن – // ١٦ – كسرا : كسورا – با ، ن –

وكذلك جزء المال هو الجزء السَّمِيُّ لعدده ، صحيحاً كان أو كسراً ، وكذلك جزء الكعب . ولكي يكون أظهر للحس فإنا نضعها في لوح :

جزء الكعب	جزء المال	جزء الجذر
١	١	١
٨	٤	٢

الواحد	الجذر	المال	الكعب
١	٢	٤	٨

فنسبة جزء الكعب إلى جزء المال كنسبة جزء المال إلى جزء الجذر ، وكنسبة جزء الجذر إلى الواحد ، وكنسبة الواحد إلى الجذر ، وكنسبة الجذر إلى / المال ، وكنسبة المال إلى الكعب . فهذه سبع مراتب متوالية ٢٢-١
على نسبة واحدة ، ونتكلم في معادلاتها لا غير . وأما جزء مال المال وجزء مال الكعب وجزء كعب الكعب ، بالغاً ما بلغ ، فتكون أيضا متناسبة ولا حاجة لنا إلى ذكرها ، إذ لا سبيل إلى استنباطها . واعلم أنك إن أخذت الثُّمن – الذي هو جزء الكعب – كعباً فيكون

---

١ – هو : و – با – / السمي : المسمى – ل – / كسرا : كسورا – ك ، ل ، ن –
٣ ، ٧ – نقل ناسخ ل اللوح على جزئين هكذا : جزء الكعب جزء المال جزء الجذر
١ ١ ١
٨ ٤ ٢
الواحد الجذر المال الكعب
١ ٢ ٤ ٨
ونقله ناسخ ن على التتابع هكذا : جزء الكعب جزء المال جزء الجذر الواحد المال الكعب
١ ١ ١ ٢ ٤ ٨
فنسبة جزء الكعب إلى جزء المال .
٤ ٢
وهكذا فقد لحقه بالسطر الذي يليه . أما في ك فلقد أضاف العلامات التقليديه فوق الأرقام وفصل جزئي اللوح بخطوط وضعها ناسخ ل تحت الأرقام – // ١١ – ونتكلم : ويتكلم – ن – / وأما : أما – ك ، ل – // ١٢ – فتكون : يكون – ل ، ن ، نكون – با ، ك –
١٣ – متناسبة : مناسبة – ك ، ل –

جزؤه ثمانية ، الذي هـو الكعب ، وبالعكس . فقس عليه سـائره . فجزء الكعب وجزء المال وجزء الجذر والواحد : هذه الأربعة تكـون في حكم الكعب والمال والجذر والواحد .

مثاله : إذا قيل جزء مال يعدل نصف جزء جذر فكأنه قيل : مال يعدل نصف جـذر ، فالمال يكون ربعاً وهـو جزء المال . فالمـال المطلوب يكون أربعة وجزؤه الربع وجزء جذره النصف . وعلى هـذا القياس في مفرداته .

وأما في المركبات : إذا قيل جزء مال وجزءا جذرٍ يعدل واحداً وربعاً فكأنه قيل : مال وجذران يعدل واحـداً وربعاً فبالطريق الذي بينـاه يخرج الجذر نصفاً والمال ربعاً ، إلا أنه بموجب السؤال : جزء مالٍ وجزءا جذرٍ تعدل واحداً وربعاً ، فيكون الربع الذي هو المال الأول جزء المال المطلوب ، فيكون المال المطلوب أربعة .

وكذلك في الرباعيات : إذا قيل جزء كعب وثلاثة أجزاء مال وخمسة أجزاء جذر تعدل ثلاثة وثلاثة أثمـان ، فكأنه قيل : كعب وثلاثـة أموال وخمسة أجذار تعدل ثلاثة وثلاثة أثمانٍ ، فبالطريق الذي بيّناه بالقطوع المخروطية يتبين ضلع الكعب فيكون هو جزء الجذر المطلوب ، فنجعل نسبته إلى الواحـد المفروض كنسبة الواحد المفروض إلى خـط آخر ، فيكون ذلك الخط هو ضلع المكعب المطلوب . فقد لاح أنـه

---

١ – جزؤه : جزء – ك ، ل – / ثمانية : ٨ – با –/ وبالعكس : بالعكس – ك ، ل ، با ، ن – ٢ – هذه : فهذه – ك ، ل – // ٣ – والجذر والواحد : والواحد والجذر – ك ، ل – ٦ – أربعة : ٤ – با – / وجزؤه : وجزء – ك ، ل – // ٨ – ربعا : أربعا – ك ، ل – ١٢ – جزء : جذر – با – / فيكون المال المطلوب : ناقصة – ك ، ل – / أربعة – ٤ – با – ١٣ – وثلاثة : و ٣ – با – // ١٤ – ثلاثة وثلاثة : ٣ و ٣ – با – / فكأنه : وكأنه – ك ، ل – / وثلاثة : و ٣ – با – // ١٥ – وخمسة : و ٥ – با – / تعدل : يعدل – ن – / ثلاثة وثلاثة : ٣ و ٣ – با –

يكون خمسة وعشرون صنفاً أخرى من هذه المعادلات بين هذه الأربعة مناسبةً للخمسة والعشرين صنفاً المتقدمة . / ٢٢-ب

وأما ضرْب بعضها في بعض فمعلوم ظاهر من كتب الجبريين ، وأنت يمكنك أن تتفطن له فلا نطوّل به القول .

وأما معادلة هذه الأربعة بالأربعة المتقدمة فكما أبيّن : إذا قيل كعب يعدل عشرة أجزاء كعب ، أي عشرة أجزاء نفسه ، فالكعب هو الأول من المراتب السبع ، وأجزاء الكعب هو السابع منها . فاضرب أحدهما في الآخر وخذ جذر المجتمع ، فما خرج فهو الواسطة ، أعني الرابع ، وهو المكعب المطلوب . وتفصيل هذا الكلام أن كلّ عدد إذا ضرب في جزْئِه السَّمِيّ له خرج الواحد ، وإن ضُرب في جزْأيه خرج اثنان ، وإن ضرب في عشرة أجزائه يخرج عشرة من العدد ، فكأنه قيل في مسألتنا : أيُّ مكعبٍ إذا ضُرب في مثله كان عشرة ، فجذره هو المكعب المطلوب ، ثم استخراج ضلع ذلك المكعب هو على ما بيناه بالقطوع المخروطية .

وكذلك إذا قيل : أي مال يعدل ستة عشر جزءاً من أجزائه السميّة له فاضرب الواحد في ستة عشر ، وخذ جذر المبلغ ، وهو أربعة ، فيكون هو المال المطلوب ، فكأنه قيل : أي مال ضربته في مثله

---

١ – خمسة وعشرون : ٢٥ – با – // ٢ – مناسبة : متناسبة – ك ، ل ، با – // ٤ – تتفطن : يستفطن – ن – / له : لها – ك ، ل ، ن – / نطول : يطول – ل ، ن – // ٦ – كعب : ناقصة – ك ، ل – / أي عشرة أجزاء نفسه : في الهامش – ن – / نفسه – نفس كعب – ك ، ل – // ٧ – السبع : السبعة – ك ، ل ، با – وهي جائزة على ضعف – / فاضرب : فالضرب – ن – // ٨ – وخذ : يؤخذ – ك – يوجد – ل – // ١٠ – وإن : فإذا – ك ، ل ، ن – // ١١ – عشرة : ١٠ – با – وصفر العشرة كتب ٥ كما هو الحال في كل المخطوطة عند الترقيم . / عشرة : ١٠ – با – // ١٢ – إذا : فوق السطر – ل – // ١٥ – إذا : إن – ن – // ١٦ – ستة عشر : ١٦ – با – / وخذ : يؤخذ – ك – يوجد – ل – وجد – ن – / أربعة : ٤ – با – // ١٧ – فكأنه : كأنه – ك ، ل – / قيل : يقول – ل –

يكون ستة عشر على القياس المتقدّم . وكذلك إذا قيل : أي جذر يعدل أربعة أجزائه فكأنه قيل : أي عدد إذا ضربته في مثله حصل أربعة وهو اثنان .

وأما إذا قيل : أي مال يعدل عدة أجزاء مكعبِ ضلعه ؟ فإن استخراج ذلك لا يمكن بالطرق التي بيناها ، إذ هو محتاج إلى إيراد أربعة خطوطٍ بين خطين لتتوالى الستة على نسبة واحدة ، وذلك قد بيّنه أبو عليّ بن الهيثم إلا أنه صعبٌ جداً لا يمكن أن يلحق بكتابنا هذا . وكذلك إن قيل : أي مكعب يعدل عدة أجزاء مالِ ضلعه ؟ فيحتاج إلى المقدمة المذكورة ولا يمكن استخراجها بطرقنا . وبالجملة فإن ضرب الأول في السادس من هذه السبع المراتب يحتاج إلى إيراد أربعة خطوط بين خطين لتتوالى الستة على نسبة واحدة كما بينه أبو علي بن الهيثم . وأما إذا قيل : أي مكعب / يعدل ستة عشر جزء ضلعه ؟ ٢٣-ا فنضرب الأول في الخامس فيكون جذرُ جذرِ المبلغ هو ضلع المكعب المطلوب . وعلى هذا القياس كل ما يعادل من هذه السبع المراتب خامستَهُ في النسبة .

وأما في المركبات ، مثل جذر يعدل واحداً وجزأيْ جذرٍ ، فهو في

١ – ستة عشر : ١٦ – با – // ٣ – أربعة وهو اثنان : ٤ وهو ٢ – با – // ٤ – وأما : فأما – با ، ن – // ٥ – إيراد : أراد – ن – // ٦ – أربعة : ٤ – با – / بين : من – ك ، ل – / لتتوالى : ليتوالى – ل ، ن – / الستة : ٦ – با – // ٧ – ابن : بن – با – / الهيثم : الهيثم رحمه الله – ك ، ل ، ن – // ٨ – أجزاء مال : أجزائها – ك ، ل – / ضلعه : لضلعه – ك ، ل – // ٩ – فيحتاج : يحتاج – ك ، ل ، با ، ن – / ولا : فلا – ك ، ل ، ن – / بطرقنا : بطريقنا – ل – // ١٠ – أربعة : ٤ – با – // ١١ – لتتوالى : ليتوالى – ل ، ن – / الستة : ناقصة – با – // ١١ ، ١٢ – ابن الهيثم : ابن الهيثم رحمه الله – ك ، ل – بن الهيثم – با – // ١٢ – ستة عشر : ١٦ – با – / جزء ضلعه : جز وضلعه – ك – جزا وضلعه – ل – // ١٣ – فنضرب : فيضرب – ل – // ١٤ – كل ما : كلما – ل – / يعادل : اللام فوق السطر – ك – // ١٥ – في : ناقصة – ك ، ل –

قوة مال يعدل جذراً واثنين من العدد ، لأن هذه الثلاثة مناسبة للثلاثة المذكورة ، فنستخرجه بالطريقة المذكورة فيخرج المال أربعة وهو يعدل جذره مع اثنين من العدد . فجذر هذا هو المطلوب ، وجذره اثنـــان وهو يعدل واحداً مع جزأيْ جذره . وكذلك إن قيل : مال وجذراه يعدل واحداً وجزأيْ جذرٍ ، فيكون في قوة كعب ومالين يعدل جذراً واثنين ، فيستخرج ضلع المكعب كما بيناه بالقطوع المخروطية ، فيكون مربع ذلك الضلع هو المال المطلوب . وكذلك إن قيل : جذر واثنان من العدد وعشرة أجزاء جذر يعدل عشرين جزء مال ، فيكون في قوة كعب ومالين وعشرة أجذار يعـــدل عشرين عدداً ، فيستخرج ضلـــع المكعب بالطريق المخروطي ، فيكون هو الجذر المطلوب .

وبالجملة فكل أربع مراتب متوالية من هذه المراتب السبع يكون حكمها في حكم الأصناف الخمسة والعشرين المذكورة . فإذا تعدى إلى خمس مراتب أو ست مراتب أو سبع مراتب فإن ذلك لا يمكن أن يستخرج بوجه من الوجوه .

مثاله : إذا قيل مال وجذران يعدل اثنين من العدد وجزأيْ مالٍ ، فإن هـــذا لا يمكن أن يستخرج لأن المال هو الثاني وجزء المال هـــو السادس ، فقد تعدى إلى خمس مراتب . فقس عليه سائره .

---

١ — مناسبة : متناسبة — ك ، ل — // ٢ — فنستخرجه : فيستخرجه — ل ، ن — / فيخرج : يخرج : با ، ن ، ك ، ل — / أربعة : ٤ — با — // ٣ — اثنين : ٢ — با — / اثنان : ٢ — با — // ٤ — واحدا : واحد — ل — / إن : ناقصة — ك ، ل — / وجذراه : الهاء فوق السطر — ك — // ٥ — فيكون : يكون — ك ، ل ، با ، ن — / ومالين : ومالان — با — مال — ك ، ل — // ٦ — واثنين : واثنان — ل — و ٢ — با — / المكعب : الكعب — با ، ن — / بيناه : بلناه — با — // ٧ — واثنان — و ٢ — با — واثنان من الضلع — ك ، ل — ٨ — وعشرة : و ١٠ — با — / عشرين — ٢٠ — با — // ٩ — ومالين : ومالان — با — / وعشرة : و ١٠ — با — / عشرين : ٢٠ — با — // ١١ — أربع : أربعة — ك ، ل — ١٢ — خمس : ٥ — با — // ١٣ — ست : ٦ — با — / سبع : ٧ — با — / مراتب : ناقصة — با ، ن — // ١٥ — اثنين : ٢ — با — / العدد — العددين — با — // ١٧ — فقد : وقد — ن — / خمس : ٥ — با —

فجميع الأصناف المفردة بين هذه السبع المراتب أحد وعشرون ؛ منها اثنان لا يمكن أن يُستخرجا بطرقنا بل يحتاج فيها إلى مقدمة ابن الهيثم فيبقى تسعة عشر صنفاً تستخرج بطرقنا ، بعضها بخواص الدائرة وبعضها بخواص القطوع . وجميع المركبات الثلاثية المتوالية خمسة عشر وتستخرج بخواص الدائرة . وجميع المركبات الثلاثية في كل أربع <مراتب>
٢٣-ب متوالية أربعة وعشرون / وتستخرج بخواص القطوع . وجميع المركبات الرباعية بين كل أربع مراتب متوالية ثمانية وعشرون وتستخرج بخواص القطوع . فجميع الأصناف — الواقعة بين هذه السبع المراتب التي يمكن استخراجها بالطرق التي بيناها — ستة وثمانون ؛ لم يذكر في كتب المتقدمين منها إلا ستة أصناف . فمن وقف على هذه المقدمات المذكورة واتفق له مع ذلك قوة في الطبع ودربة في المسائل ، لم يكد يخفى عليه من المسائل المعتاصة على المتقدمين شيء .

فقد حان لنا أن نختم هذه الرسالة حامدين لله تعالى ، مصلّين على أنبيائه أجمعين .

---

١ — أحد وعشرون : أحد وعشرين — ك ، ل ، ن — ٢١ — با — // ٢ — اثنان : ٢— با — / يستخرجا : يستخرج — ل ، ن ، با — / بطرقنا : بطريقنا — ك ، ل ، ن — // ٣ — تسعة عشر : ١٩— با —/ تستخرج : يستخرج— ل ، ن — / بطرقنا : بطريقنا — با —// ٤ ، ٥ — المتوالية... في كل : ناقصة — ك ، ل — // ٤ — خمسة عشر : ١٥ — با — / وتستخرج : ويستخرج — ن — ٥ — أربع : أربعة — ك ، ل ، ن — ٤ — با — // ٦ — أربعةوعشرون — ٢٤ — با — / أربعة وعشرين — ك ، ل ، ن — / وتستخرج : ويستخرج — ل ، ن — // ٧ — ثمانية وعشرون : ٢٨ — با — ثمانية وعشرين — ن — / وتستخرج : ويستخرج — ل ، ن — // ٨ — السبع : كتبها السبعه ثم صححها عليها — ك — ولقد نقل ناسخ ل الكلمة والتصحيح — // ٩ — ستة وثمانون : ٨٦ — با — // ١٠ — المقدمات : المتقدمات — ن — // ١١ — في : فوق السطر — ل — ١٢ — شيء : ناقصة — ك ، ل — ونجد بعدها في با « فقد حان لنا أن نختم هذه الرسالة حامدين لله مصلين على أنبيائه أجمعين » وفي ن نجد « وصلى الله على محمد وآله أجمعين وسلم تسليما كثيرا والحمد لله حق حمده والصلوة على رسوله محمد وآله أجمعين » .

< مسألة أبي الجود بن الليث >

هذا وقد حكى لي بعض من شدا شيئاً نزراً من الهندسة بعد تأليفي هذه الرسالة بخمس سنين أن لأبي الجود محمد بن الليث المهندس كلاماً في تعديد هذه الأصناف وتحليل أكثرها إلى القطوع المخروطية من غير استيفاء جميع أنواعها وتمييز الممكن من المستحيل، بل بحسب ما تأدى به النظر في المسائل الجزئية إليها، فلم استبعد ذلك لأن هذين الصنفين اللذين نسبتهما إلى واحد ممن تقدمنا منسوبان إليه وقد شاهدتهما وتصفحتهما في جملة تصنيفات أبي الجود بخط الحازمي الخوارزمي، وأحدهما من الثلاثيات، وهو مكعب وعدد يعدل أموالاً وله أنواع، ولأنواعه شرائط كما هو مذكور في هذه الرسالة، ولم يستوف شرائطها ثم أبطل في حكمه أيضاً في هذا الصنف بقوله: إن كان ضلع المكعب المساوي للعدد أعظم من نصف عدة الأموال استحالت المسألة، وليس كذلك كما بيناه، وذلك بسبب أنه لم يفْطِن لتماس القِطعين أو لتقاطعهما في ذلك الجانب الآخر، والثاني من الرباعيات — وهو مكعب وعدد وأضلاع تعدل أموالا — فلعمري إنه قد أحسن في الوقوف على هذه المسألة بعد / ما أعيت جماعةً من ٢٤-١

١، ٨ ص ٧٣ — يختلف وضع هذه الفقرة باختلاف المخطوطات : في ك، ل تنتهي بها رسالة الخيام فهي تقع إذا بعد كل ما يتبعها، وفي ن فهي تقع مباشرة بعد المعادلة الأخيرة أي آخر معادلة رباعية وقبل الكلام على « أجزاء الأصناف »، ولقد فضلنا اتباع مخطوطة با في وضعها في هذا المكان وذلك لموافقتها لتسلسل أفكار الخيام — // ١ — شيئا : شياء — ل — ٢ — تأليفي : تأليف — ك، ل — // ٣ — المهندس : المهندس رحمه الله — ك، ل، ن — / تعديد : تعديل — ك، ل — // ٤ — المخروطية : المخطروطية — ل — // ٥ — الجزئية : الجبرية — با — // ٦ — اللذين : الذين — ل — / نسبتهما : يسببهما — ك — بسببهما — ل — ٧ — شاهدتهما — ناقصة — ك، ل — / وتصفحتهما : ناقصة — با — تصفحتهما — ك — تصفحهما — ل — وتصفحتها — ن — / الحازمي : ناقصة — ن — // ٨ — الخوارزمي : الخوارزمي رحمه الله — ن — // ١٠ — شرائطها : شرائطهما — ن — // ١٢ — استحالت : كتبها في ن استحالة ثم كتب فوق « لة » لت — // ١٣ — يفطن : تفطن — ك — يتفطن — با — / لتقاطعهما : لتساطعهما — ك — ليتقاطعهما — ل — // ١٥ — أعيت : أعييت — ل —

المهندسين لكن مسألته جزئية ، وللصنف أنواع وشرائط فإن في مسائله ما يستحيل فلم يستوفها حق الاستيفاء . وإنما ذكرت هذا ليقابل من يصل إليه الرسالتان ، إن كان ما حكي لي من حال هذا الفاضل حقاً ، بين رسالتي هذه والمنسوبة إلى هذا الفاضل . فإني أظن أني لم آل جهدا في الاستيفاء مع الإيجاز وتجنب التطويل المبرم ، ولو شئت لأثبت بمثال لكل واحد من هذه الأصناف وأنواعها ، لكن خشيت التطويل فاقتصرت على هذه القوانين الكلية تعويلا على ذهن المتعلم ، لأن من يكون ذهنه بحيث يتصور هذه الرسالة لا يقصر عما يرومه من الأمثلة الجزئية واستقرائها ، والله الموفق للصواب وعليه المعوّل في كل حال .

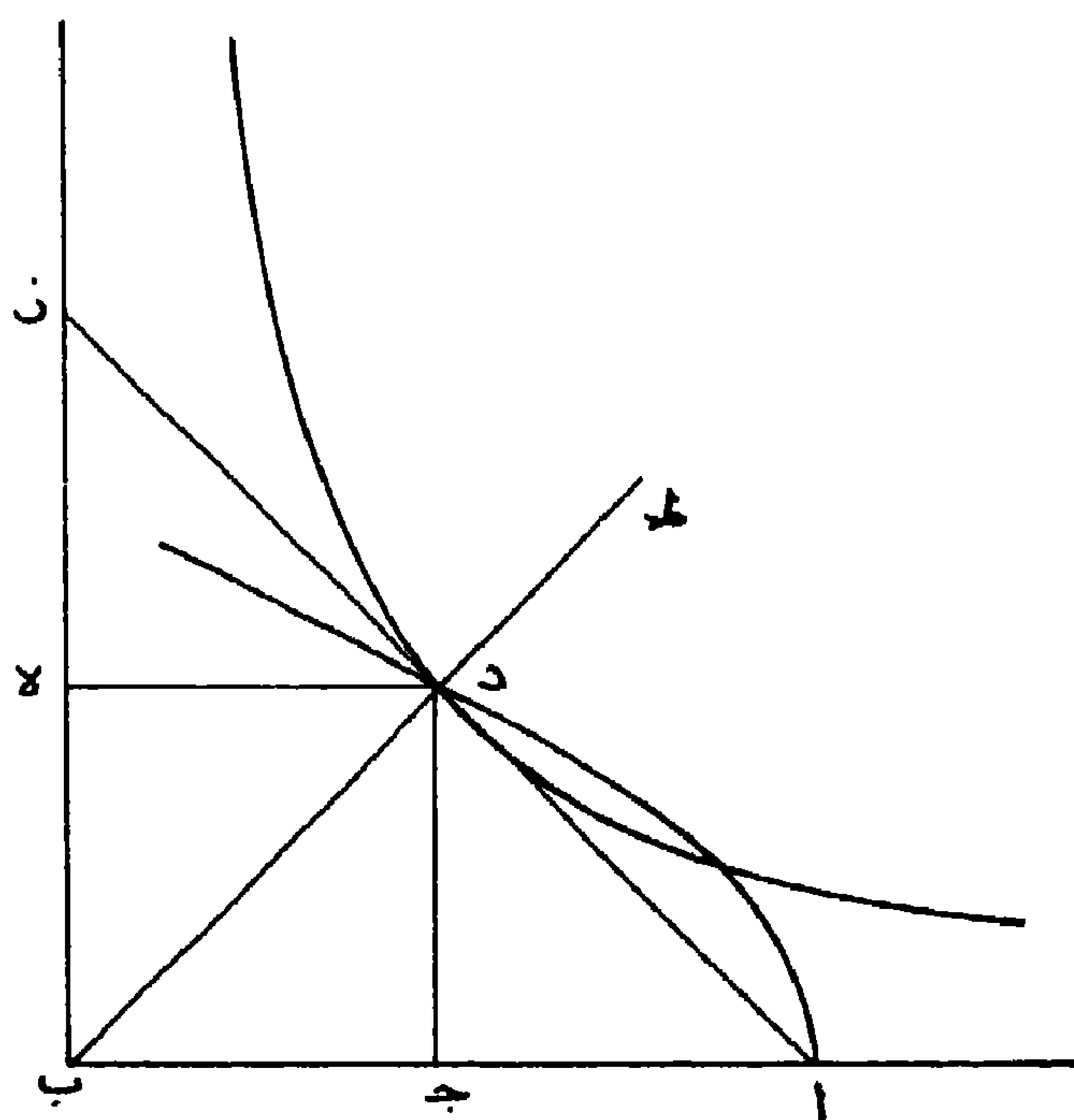
وبعد فإن واحداً من أصحابنا اقترح علينا أن نبين خطأ أبي الجود محمد بن الليث في الصنف الخامس من الأصناف الستة الثلاثية التي تنحل بالقطوع وهو مكعب وعدد يعدل أموالاً . قال أبو الجود : نضع عدة الأموال خط اب ونفصل منه ضلعَ مكعبٍ مساوٍ للعدد وهو ب ج ، فخط ب ج إما أن يكون مثل ج ا ، أو أعظم منه أو أصغر .

قال : إذا كان مثل ب ج فإنا نتم سطح ج ه ونعمل على د قطعاً زائداً لا يلقاه اب ب ه ونعمل قطعاً مكافئاً رأسُه نقطة ا وسهمه اب وضلعه القائم ب ج فيمر القطع لا محالة على نقطة د كما بيناه ، ثم زعم أن القطعين يتماسان على نقطة د وأخطأ لأنه يجب أن يكونا متقاطعين .

برهانه : إنا نجعل ب ز مثل ب ا ونصل ا ز فهو يمر على د

---

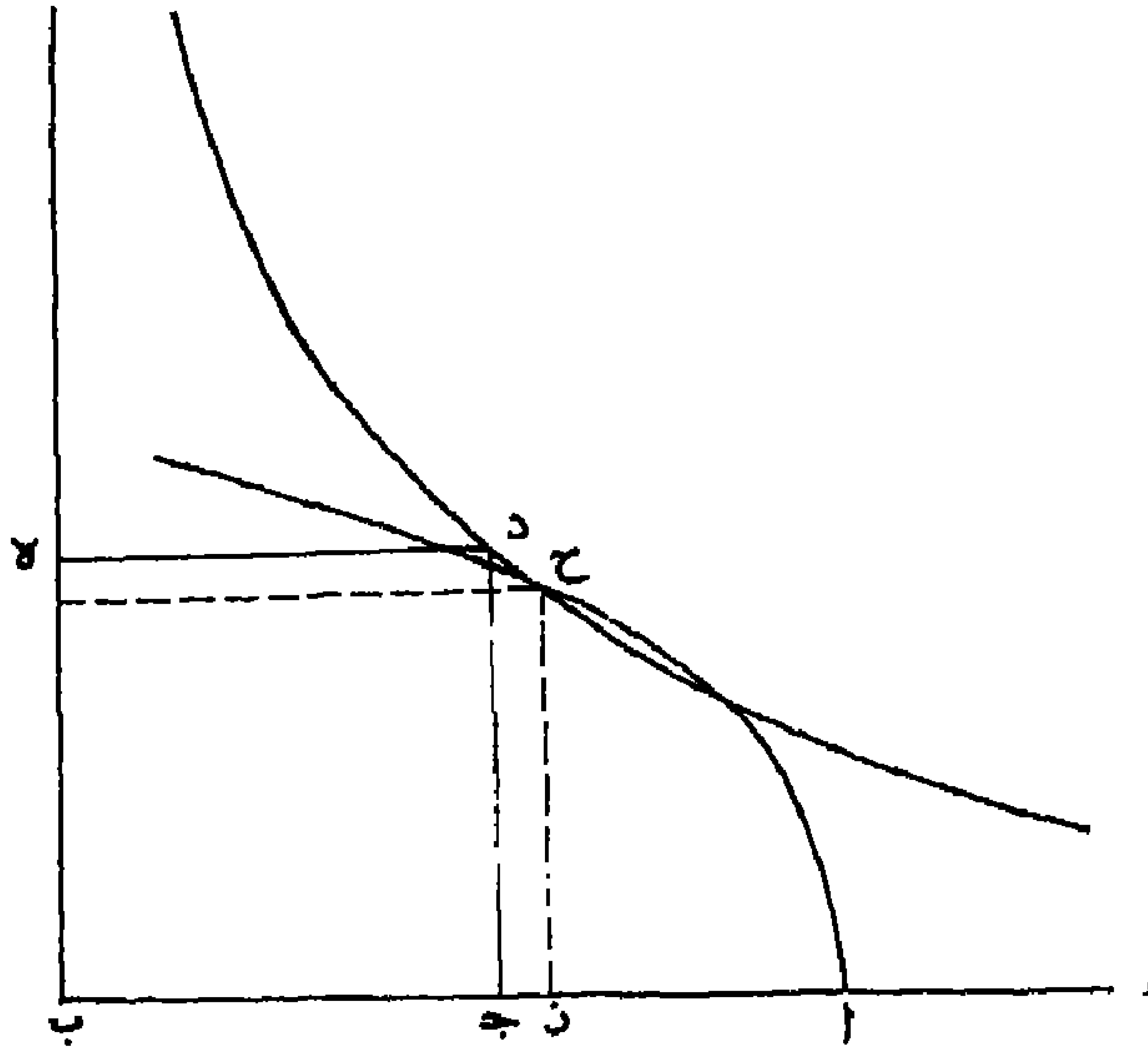
٢ — ليقابل : التقابل — ك ، ل — // ٣ — كان : كان على — با — // ٣ ، ٤ — حقا ... الفاضل : ناقصة — ك ، ل — / أني : ناقصة — با — // ٥ — الايجاز : ايجاز — ك ، ل — ٥ ، ٦ — المبرم ... التطويل : ناقصة — ك ، ل — // ٧ — القوانين : ناقصة — ك ، ل — ٩ — حال : حال وحسبنا الله ونعم الوكيل — ك ، ل — حال وصلى الله على نبيه محمد وآله الطيبين الطاهرين وسلم تسليما — ن — // ١٠ — وبعد : نجد قبلها كعنوان « قال الحكيم » في ن — / اقترح : أقرح — ن — // ١٢ — نضع : يضع — ل — / عدة : هذه — ل — // ١٣ — ونفصل : ويفصل — ل — // ١٥ — قال : إذا — ل — // ١٧ — فيمر : فيتم — ن — // ١٨ — يكونا : يكونان — ك ، ل — // ١٩ — ونصل : ونفصل — ك ، ل —



لا محالة ، ويكون في داخل القطع المكافىء وتكون زاوية / ا د ب قائمة ٢٤-ب
وزاوية ا ب د مثل زاوية ز ب د . ومعـــلوم أن سهم القطع الزائد يقسم الزاوية المحيطة بالقطع بنصفين ، فيجب أن يكـون خط ب د ط ســـهم القطع الزائد الذي على د ، وخط ا د مواز لخطوط الترتيب فهو يماس القطع الزائد ، فيلزم أن يكون المكافىء قاطعاً للزائد لا يجوز أن يكون بينه وبين الخط المماس له ، لأنه لو كان مماساً له لكانت الخطـــوط الخارجة من نقطة د إلى أيّة نقطـــة فرضت على محيط ا د واقعـــة بين القطع وبـــين الخط المماس له ، وذلك محـــال ، فباضطرار أن يكون المكافىء يقطع الزائد <على نقطة د و> على نقطة أخرى فيما بـــين ا د وذلك ما أردنا أن نبين .

---

١ — وتكون : ويكون — ل ، ن — // ٣ — المحيطة : ناقصة — ن — المحيط — ك ، ل — / بالقطع بنصفين : بنصفين بالقطع — ن — / سهم : ناقصة — ك ، ل — // ٤ — لخطوط : للخطوط — ن — / يماس : مماس — ك ، ل — // ٧ — أية : أيت — ن — // ٨ — وبين : ناقصة — ك ، ل —



فهذا وجه خطأ هـذا الفاضل في قوله : إن القِطعين يجب أن يكونا متماسّين على د .

وأما قوله : إذا كان ب ج أعظم من ا ج فإن المسألة مستحيلة وذلك لأن القطعين لا يتلاقيان ، فكلام باطل ، بل يجوز أن يتلاقيا بالتقاطع أو بالتماس على نقطة أو نقطتين فيما بين ا د كما بيناه هناك ، وعليه برهان أعم مما ذكرنا :

فليكن عدة الأموال ا ب ، وضلع المكعب ب ج وهو أعظم من نصف ا ب ويتم ج ه ونعمل القِطعين كما عرفته ، وليكن ا ب عشرة و ز ب ستة ، فيكون ضرب مربعه في ز ا مائة وأربعة وأربعين ، وهو العدد

---

٢ — متماسين : مماسين — ل — / على د : كتب ناسخ ن بعدها « وعليه برهان آخر يرجع من هاهنا إلى ظهر الكتاب » . ولعله أراد كتابة « يرجع ... الكتاب » بعد كلمة « برهان » بعد هذا بسطرين ثم أخطأ فوضعها هنا لأننا لو رجعنا إلى ظهر الكتاب فسنجد الفقرة التي تتبع « وعليه برهان أعم » .
٣ ، ٥ — وأما قوله ... هناك : ناقصة — ك ، ل — // ٣ — ا ج : ج — با — ج ا — ن — ٤ — فكلام : كلام — ك ، ل ، با ، ن — // ٥ — فيما بين — ناقصة — با — / ا د : اذ — با — // ٦ — ذكرنا : ذكرناه — با — // ٩ — ستة : فوق السطر — ك — / مائة وأربعة وأربعين : ١٤٤ — با —

وضلعه ب ج ، ولا محالة أن ب ج أعظم من خمسة لأن مكعب خمسة مائةٌ وخمسة وعشرون ، فالمجسّم الذي قاعدته مربع ز ب وارتفاعه ز ا مثل مكعب ب ج ، فقاعدتاهما إذاً مكافئتان لارتفاعيهما ، أعني يكون نسبة مربع ز ب إلى مربع ب ج كنسبة ب ج إلى ز ا ، ونخرج من ز عموداً يقطع القطع الزائد على نقطة ح ويُتَمّ ح ب ، فسطح ح ب مثل ج ه فأضلاعهما متكافئة ، أعني نسبة ز ب إلى ب ج / كنسبة ب ج إلى ز ح ، فيكون نسبة مربع ز ب إلى مربع ب ج كنسبة ز ب إلى ز ح ، وقد كانت تلك النسبة مثل نسبة ب ج إلى ز ا ، فنسبة ز ب إلى ز ح كنسبة ب ج إلى ز ا ، وبالتبديل كذلك < يكون نسبة ز ب إلى ب ج كنسبة ز ح إلى ز ا > ، فالخطوط الأربعة متوالية ز ب ب ج ز ح ز ا ، فيكون مربع ز ح مثل ضرب ب ج في ز ا ، و ب ج هو الضلع القائم للقطع المكافىء الذي سهمه ا ب ورأسه ا ، فيكون ز ح من خطوط الترتيب ، فنقطة ح إذن على محيط المكافىء لا محالة ، وقد كانت على محيط الزائد فهما إذن متلاقيان . فقد ظهر خطأ أبي الجود في قوله : إن القطعين لا يتلاقيان ، وذلك المراد . ٢٥-١

ولكي يكون أظهر ، فإنا نضع ا ب ثمانين و ب ج — الذي هو ضلع المكعب المساوي للعدد — واحداً وأربعين ، وهو أعظم من ا ج ، فنقطة د تقع من خارج القطع المكافىء ، فليمرّ المكافىء على ل فيكون خطُّ ل ج جذرَ ألفٍ وخمسِ مائةٍ وتسعةٍ وتسعين ، وهو

---

١ — خمسة : ناقصة — ك ، ل — // ٢ — وعشرون : وعشرين — ن — // ٣ — مثل : ناقصة — با — / إذاً : ناقصة — با — إذن — ن — // ٥ — ز : د — ل — / ويُتمّ : وتم — ل — ٧ — ز ب إلى مربع — أضافها ناسخ ك في الهامش — / ز ب : ب ز — با — // ١٠ — : ب ج ب ح — ك ، ل — // ١٣ — الترتيب : التركيب — ل — / إذن : إذا — با — // ١٤ — إذن : إذا — ك ، ل — // ١٥ — المراد : بها ينتهي ما كتبه الناسخ في ظهر ن — // ١٦ — ولكي : لكي — ك ، ل — // ١٧ — للعدد : لعدد — ن — / واحدا : أحد — ك ، ل — واحد — با ، ن / ١٨ — تقع : يقع — ن — / فليمر : وليمر — با — // ١٩ — ل ج : لـ — با — / ألف ... وتسعين : ١٥٩٩ — با —

أربعون إلا شيئاً يسيراً ، ونجعل ط ج مثل ج ب و ب ح مثل ب ط ونصل ط هـ فهو يماس القطع الزائد كما بيناه ، ونفصل ا ك ربع ا ج ونخرج منه عموداً يقطع القطع على نقطة م فيكون نسبة مربع ل ج إلى مربع ك م كنسبة ا ج إلى ا ك لأنهما خطان من خطوط ترتيب المكافىء ، وقد بينه أبلونيوس في شكل يط من مقالة ا فيكون ك م نصف ل ج وهو عشرون إلا شيئاً يسيراً و ج ط أحداً وأربعين ؛ و ا ك تسعة وثلاثة أرباع ، و ا ط اثنين ، فيكون خط ط ك أحد عشر وثلاثة أرباع ؛ ولأن نسبة ك ز إلى ك ط كنسبة ح ب إلى ب ط وهما متساويان < فخط ك ز مساو ك ط > ، فخط ز م يكون أعظم من ثمانية ، وهو في / داخل ٢٥-ب الخط المماس للزائد ، فهو في هذا الوضع يكون في داخل القطع الزائد لا محالة .

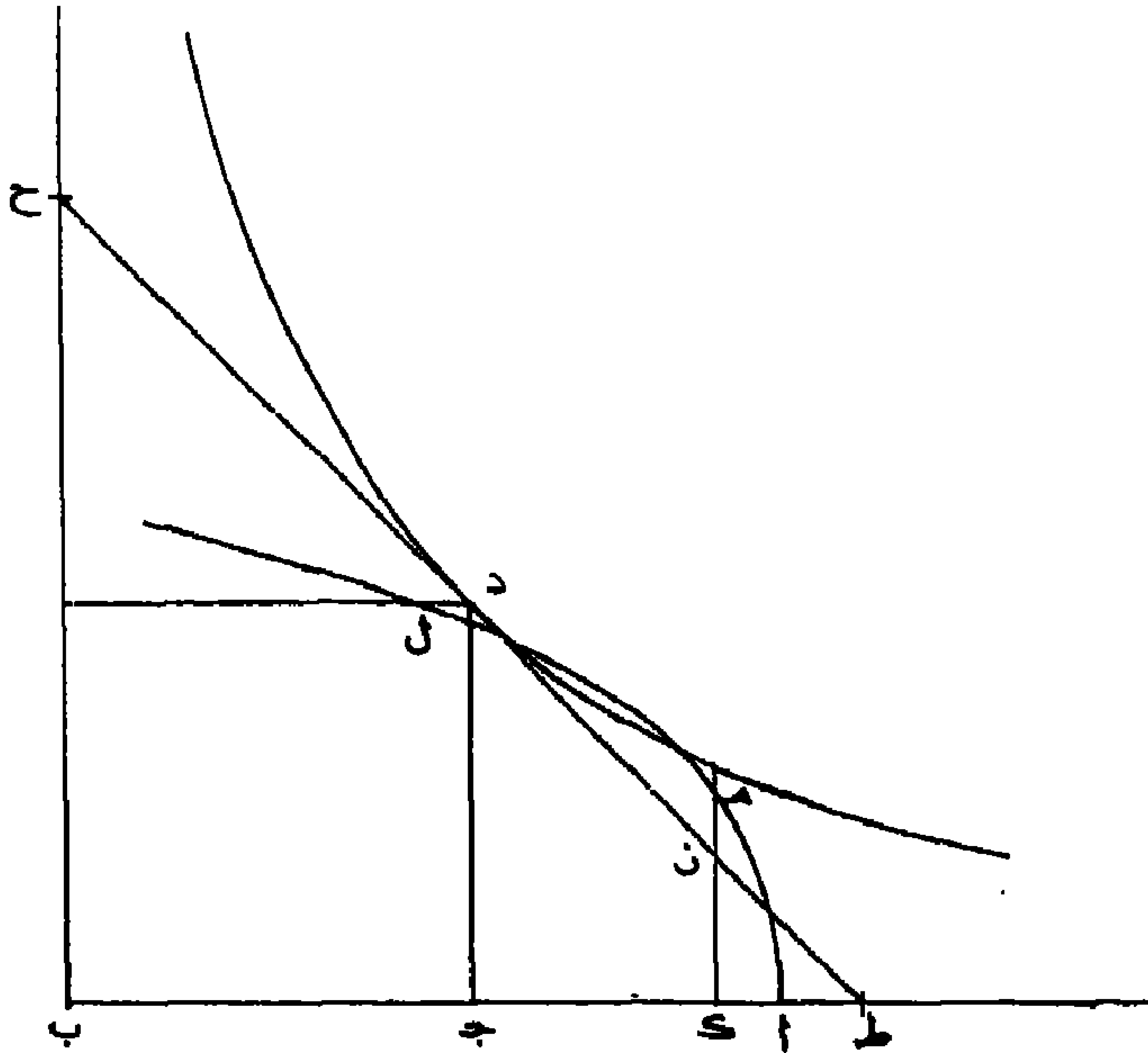
نعم قد يكون القطعان غير متلاقيين إذا كان ب ج أعظم من ج ا ، لكن ذلك غير واجب في جميع الأنواع ، فقد أبطل أبو الجود في هذا الحكم ، فافهمه .

ولو أردت أن تجد أمثلة عددية لأمكنك ذلك من هذه المسألة : هو إضافة مجسم إلى خط مفروض ينقص عن تمامه مكعباً ، ويكون مساوياً

---

١ – أربعون إلا شيئا : الأربعون الأشياء – ك ، ل – / ونجعل : ويحصل – با – ويجعل – ل – ٣ – على : وعلى – با – / ل ج : لـ – با – // ٤ – ترتيب : الترتيب – ل – // ٥ – ل ج : د ح – با – // ٦ – إلا شيئا : الاشياء – ك ، ل – / و ج ط : وخط – با – / أحدا : أحد – ك ، ل ، با – / أربعة – ن – / تسعة وثلاثة أرباع : $\frac{9}{3\ 4}$ – ن – // ٧ – اثنين : اثنان – با ، ك ، ل – $\overline{٢}$ – ن – / ط ك : ك ل – ك ، ل ، ن – / أحد عشر وثلاثة أرباع $\frac{\overline{11}}{3\ 4}$ – ن –

١٠ – للزائد : الزائد – با – // ١٢ – ب ج : ب ج إلى ج ا – ن – ب ج إلى د ج – ك ، ل – ١٥ – لأمكنك : لا يمكنك – ك ، ل – / من هذه : وهذه – ك ، ل ، ن – / هو : هي – با – ١٦ – اضافة : اضافه – با –



لمجسم آخر مفروض . فإن كان ضلع المكعب المساوي للمجسم المفروض مثل نصف الخط أو أصغر ، فإن ذلك واجب ، وإن كان أعظم فإنه يمكن أن يقع فيه ما يستحيل بحسب ما بينّاه لك .

---

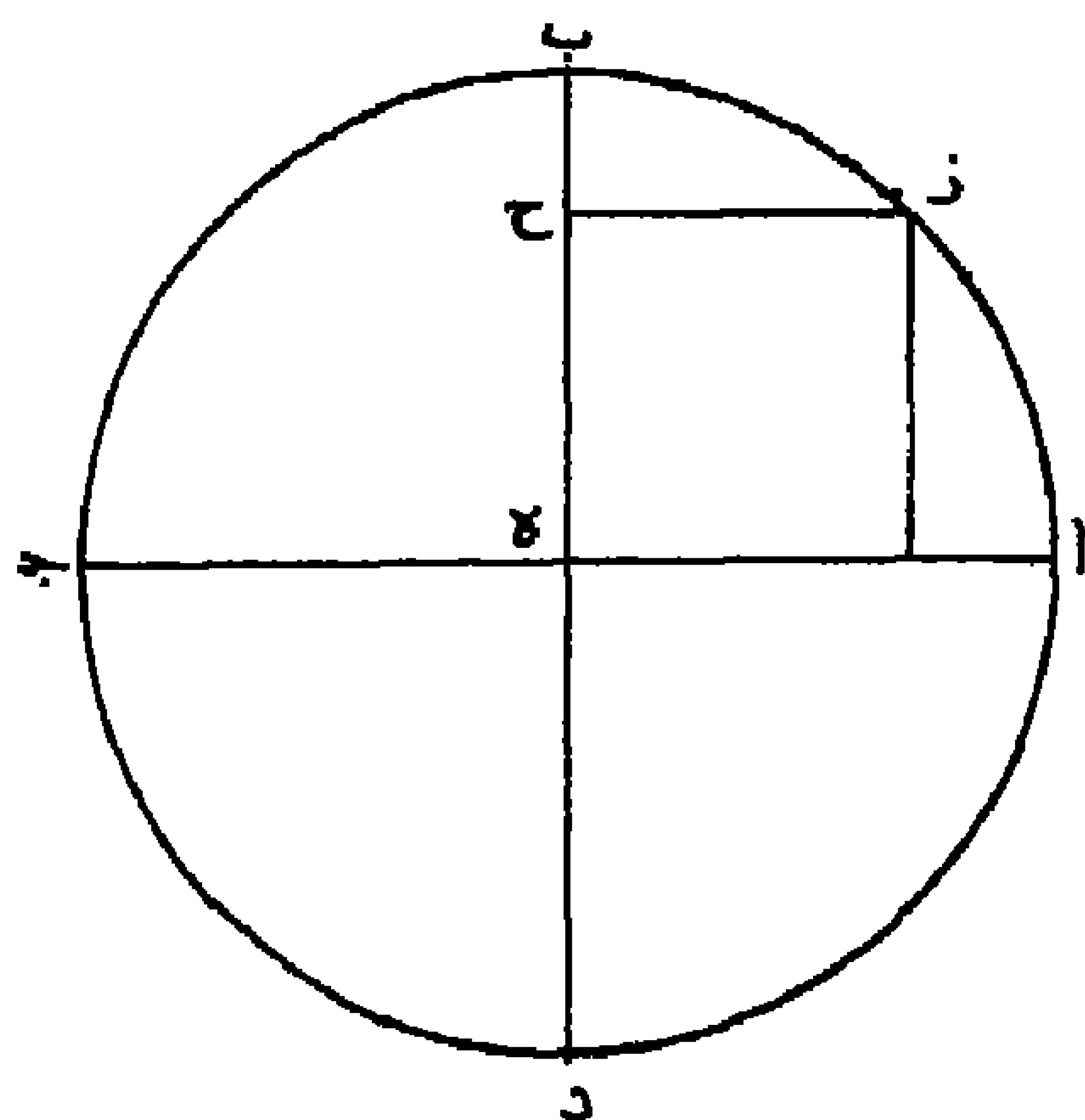
١ – المفروض : المساوى – با ، ك ، ل ، ن – // ٣ – بحسب : اضافها ناسخ ك في الهامش – / ما بيناه لك : بينا ذلك – ك ، ل – / لك : كتب بعدها ناسخ ن « الحمد لله وحده وصلى الله على نبيه محمد وآله أجمعين » ؛ كتب بعدها ناسخ با » والله الميسر لحل هذه العويصات بمنه وكرمه . تمت الرسالة ظهيرة يوم الأحد الثالث والعشرين من شهر ربيع الأول سنة (غير مقروءة) والحمد لله وحده وكفى فسلام على عباده الذين اصطفى .

هذه رسالة لأبي الفتح عمر بن ابراهيم الخيامي ١ - ب

بسم الله الرحمن الرحيم وبه نستوثق وعليه نستعين

نريد أن نقسم ربع دائرة اب من دائرة اب ج د بقسمين على نقطة مثل ز ونخرج عمود زح على قطر ب د فيكون نسبة اه الى زح كنسبة ه ح إلى ح ب و ه مركز الدائرة و اه نصف القطر [نصف القطر] .

فإنا ننزل أنا قد فعلنا حتّى يؤدي التحليل الى أمر معلوم ، ثم نركب على تلك الصفة فنعيد دائرة اب ج د ومركزها ه ، ونخرج اج ب د يتقاطعان على زوايا قائمة ، ونخرج عمود زح يكون نسبة اه اليه كنسبة ه ح الى ح ب . ونخرج عمودي ك ز ط ، ط ب م ونتمم سطح ط ل بعد أن جعلنا خط ب م مثل اه .



---

١٠ – ح ب : ج ب –

فلأن نسبة اه إلى زح كنسبة هح إلى حب ، و بم مثل اه ، يكون نسبة بم إلى زح <كنسبة هح إلى حب> وضرب بم في حب مساويا لضرب زح في هح كما بينه أقليدس في يو من و <من> الأصول ، وضرب بم في حب مثل سطح بل ، وضرب زح في هح مثل سطح حك ، فيكون سطح بل مساوياً لسطح حك ، ونجعل سطح حط مشتركاً ، فيكون سطح طه مساوياً لسطح طل . فإن عملنا قطعاً زائداً لا يلقاه خطّا كط طم ويمرّ على نقطة ه كما بينه أبلونيوس في نط من المقالة الأولى من كتاب المخروطات ، والشكل و و ه من المقالة الثانية من هذا الكتاب — إذ هذا العمل يتم بهذه الأشكال الثلاثة — فإن ذلك القطع الزائد يمرّ على نقطة ل لا محالة ، كما يتبين من عكس الشكل الثامن من المقالة الثانية من كتاب المخروطات .

ونقطة ه معلومة الوضع ، وخط بم معلوم الوضع والقدر ، إلا أن نقطة ل عند التركيب غير معلومة الوضع ، لأنها لو كانت معلومة

---

٢ – وضرب : ضرب – // ٣ – حب : جب – // ١٠ – لا محالة : لا محة –

الوضع لكانت نقطة ح معلومة الوضع ، لأن خط ح ل معلوم القدر ، فيكون خط ب ح معلوم القدر ، ولكان الشكل معلوما / . وكذلك خط ٢ ـ ١ ط ك غير معلوم الوضع لأنه لو كان معلوم الوضع لكانت نقطة ط معلومة الوضع ولو كانت نقطة ط معلومة الوضع لكان خط ط ب معلوم القدر ، ولو كان خط ط ب معلوم القدر لكان الشكل معلوماً ، وليس كذلك ، إذ المقصود علم الشكل .

فلو كان نقطة ل معلومة الوضع ، أو خط ط ك معلوم الوضع ، لكان يمكن أن يعمل الشكل وينال المقصود عند التركيب بسهولة . وليس المعرفة بواحدة منها سهلة .

فتجنَّبُ هذه الطريقة للباحث المستبصر بكتاب المخروطات يُوصل إلى المطلوب بطريقة أخرى < و > أمكنه التفطن لهذه الطريقة < التي سأذكرها > .

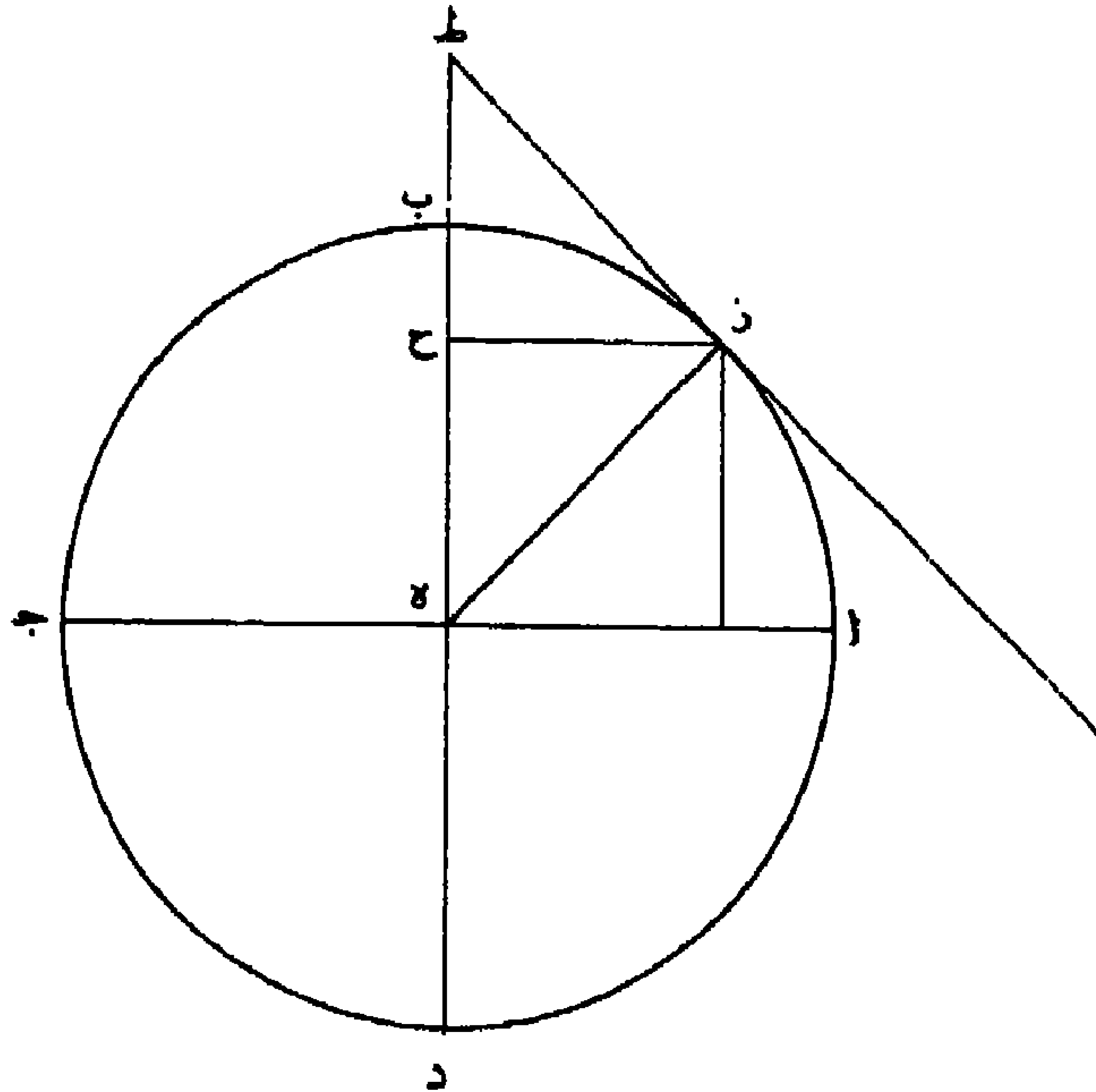
وإنما أوردت هذه الطريقة مع صعوبتها ليكون شبه تمهيد للمتعلم وتوطئة له ، ولم أتممها ولم أركبها على الوجه الهندسي لصعوبتها وكثرة افتقارها الى عدة مقدمات ، وغيره من القطوع المخروطية . فليتمم من شاء من العالمين بقطوع المخروط بعدما تحصلت له الطريقة التي أذكرها ، فإنها وإن كانت أيضا مفتقرة إلى مقدمات مخروطية ، فهي أسهل بكثير من الأولى ، ومقدماتها أعم منفعة .

فأقول بعون الله : نعيد الشكل فننزل بالتحليل أنا قد فعلنا ما أردنا وصارت نسبة آ ه إلى ز ح كنسبة ه ح إلى ح ب ، ونخرج من نقطة

---

١٠ – فتجنب : غامضه في الأصل ولقد كتب الناسخ فوقها « كذا » مما يعني أنه لم يفهمها
١١ – يوصل : لا يوصل – // ١٠ ، ١٢ – العبارة لا معنى لها في النص ولهذا اقترحنا ما أثبتناها .

ز خطاً يماس الدائرة وهــو ز ط على ما بينه أقليدس في يو مــن ج ونخرج ه ب على اســتقامته حتّى يقطــع الخط المماس على نقطــة ط ونصل ز ه ، فلأن مثلث ه ز ط زاوية ز منه قائمة وخرج من زاوية ز عمود ز ح إلى القاعــدة ؛ فعلى ما تبين في شكل ح من و يكون نسبة ه ح إلى ح ز كنسبة ح ز إلى ح ط . فيكون مربع ح ز مساوياً لضرب ه ح في ح ط ، ولكن مربع ح ز مساوٍ لضرب د ح في ح ب فيكون ضرب د ح في ح ب مساوياً لضرب ه ح في ح ط فيكون نسبة ح د إلى ه ح كنسبة ح ط إلى ح ب على ما تبــين في يو من و ، فبالتفصيل يكون نسبة ه د الى ه ح كنسبة ب ط إلى ب ح . وقد كانت نسبة ا ه الى ز ح كنسبة ه ح إلى ح ب ، فبالتبديلين يكون نسبة ا ه إلى ه ح كنسبة ز ح الى ح ب .



٤ – ح : ج – // ٥ – ح ز : ج ز – / ح ط : ج ط – // ٦ – ح ب : ج ب
١٠ – ح ب : ج ب – // ١١ – ح ب : ج ب

وقــد كانت نسبة جـه إلى هـح كنسبة ب ط إلى ب ح فيكون نسبة ز ح إلى ح ب كنسبة ب ط إلى ح ب ، والمقـادير — التي نسبتُها إلى شيء واحد بعينه متساويةٌ — فإنها أيضا متساوية كما تبين في شكل ط من مقالة هـ . فيكون ز ح مساوياً لـ ب ط . و ز هـ مثـل هـ ب ، فيكون مجموع هـز ز ح مساوياً لخط هـ ط .

فقد أدى التحليل إلى مثلث قائم الزاوية بشرط أن يكـون وتر الزاوية القائمة مساوياً لأحد الضلعين المحيطين / بالزاوية مجموعاً إلى العمود ٢-ب الخارج منها إلى وترها . فكلما عملنا مثلثاً قائم الزاوية بهذه الصفة أمكننا تركيب هذا الشكل على الوجه الهندسيّ . وإن هـذه المقدمة أعني هذا المثلث بهذه الصفة عظيمة المنفعة في أمثال هذه الأشكال ، وله خواص أخرى ، يُذكر بعضها حتى يتفطن الناظر لمنفعتها في أكثر أشباه هـذه المسألة .

أقول : إن هذا المثلث لا يمكن أن يكون متساوي الساقين :

لأنه لو كان ضلع هـز مثل ز ط لكان هـح مثل ح ط ، ولكان العمود مساوياً لكل واحد منهما ولكان هـط ضعف العمود ، ولكان مجموع هـز والعمود أعظم من الوتر ، وقد فرضناه مساوياً له . وهـذا خُلْف .

وأقول : إن هـز أصـغر من ز ط ، لأنه لو كان أعظم منه لكان هـح أعظم من ح ط ، ولكان ح ز الذي هـو الخط الوسط بين خطي هـح ح ط أعظم من ح ط . وقد فرض ح ز مثـل ط ب فيكون ط ب أعظم من ط ح ، الجزء أعظم من الكل ، وهذا محال . فقد تبين أن المثلث على هـذه الصفة : يكون الضلع الأصغر من العمود مساوياً للضلـع الأعظم ، وذلك ما أردنا أن نبيّن .

---

١ — جـه : د هـ — // ٢ — حب : جـ ب / ح ب : جب — // ١٦ — وقد : فوق السطر بيد الناسخ — / وهذا خلف : كتبها هكذا : هف — // ١٧ — هـ ح : هـ جـ ١٨ — ح ط : جـ ط — / ح ز : جـ ز — // ١٩ — ح ز : جـ ز — // ٢٠ — وهذا محال : هذا مح

ومن خواصه : أن الضلع الأعظم من الضلعين المحيطين بالزاوية القائمة مساوٍ لمجموع الأصغر مع القطعة التي يفرزها العمود من الوتر ، من جانب الضلع الأصغر . وليكن مثالنا من الشكل المتقدم .

أقول : إن مجموع هز هح مساوٍ لضلع زط .

برهانه : إن نسبة هد إلى هح كنسبة طب الى بح ، فبالتركيب يكون نسبة دح إلى حه كنسبة طح إلى حب ، وبالتبديل يكون نسبة دح إلى حط كنسبة هح إلى حب ، ولكن نسبة هح إلى حب كنسبة هز إلى زح . ونسبة هز إلى زح كنسبة زط إلى حط لتشابه مثلثي هزط ، زحط ، فيكون نسبة زط إلى حط كنسبة دح إلى حط فيكون زط مساوياً لـ حد ، و حد هو مثل مجموع هز هح فمجموع هز هح مثل زط ، وذلك ما أردنا أن نبيّن .

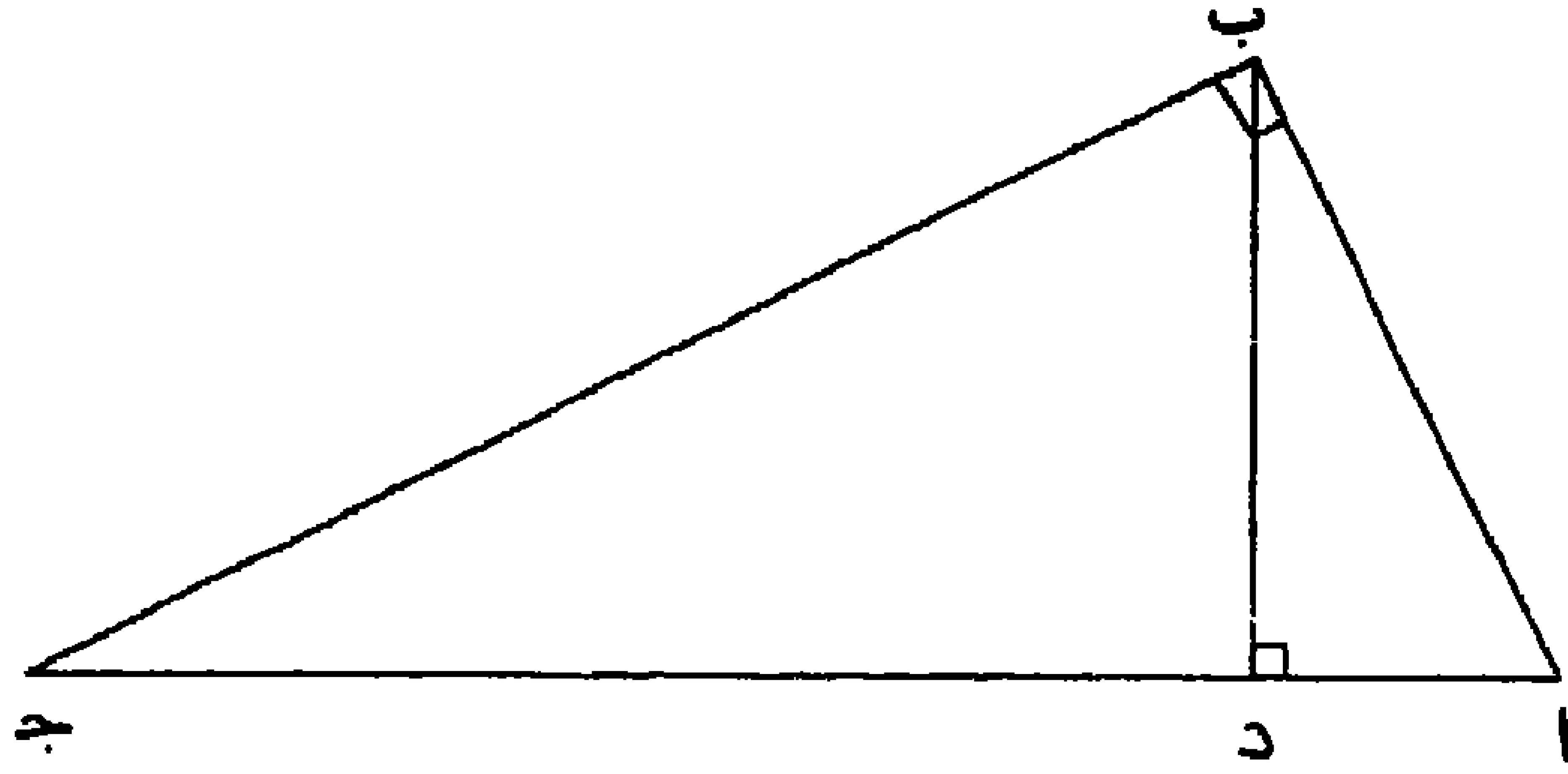
ومن بعدما نقدم هذا ، فإنا نضع مثلث ابج وزاوية ب منه قائمة ، ونخرج من نقطة ب عمود بد على اج ، ولنتنزل بالفرض أن ضلع اب مع عمود بد جميعا مثل اج حتى يؤدي التحليل إلى معلوم ، ثم نركبه حتى يحصل لنا مثلث بالصفة المذكورة .

ولكي نكون مقتدين بالمتقدمين الأفاضل من أصحاب الصناعة في تسهيل الطرق الحسية باستعمالهم ألفاظ أهل الجبر في أمثال هذه المسائل ، فنستنهج سبيلهم في ذلك ، وإن لم يستعمل ألفاظ الجبريين جاز ويكون العمل واحداً . إلا أن هذه الألفاظ إذا استعملت كان الضرب والقسمة أسهل .

ونضع خط اد منطقاً في الطول وليكن عشرة / ونضع بد شيئاً ٣ - ا
ونضربه في مثله يكون مالاً . ونضرب عشرة في مثلها يكون مائة ،

---

٦ – طح : طج – / حب : جب – // ٨ – حب : جب – / هز : دز
٩ – هزط : هزح – / حط : جط – // ١١ – هح : ده – / هح : زح
١٦ – ولكي : ولكن – // ٢٢ – ونضرب : ويضرب



ونجمعها يكون مائةٌ ومالٌ ، وهو مربع اب كما تبين في مز من ا ، ومن أن نسبة اجـ إلى اب كنسبة اب إلى اد لتشابه مثلثي ا ب جـ ، ا ب د يكون ضرب اجـ في اد مساوياً لمربع اب ، فإذا قسمنا مربع اب الذي هو مائة عدد ومال على اد الذي هو عشرة يخرج من القسمة عشرة < من > عدد وعُشر مال وهو اجـ . وقد كنا فرضنا أن اجـ مثل مجموع اب ، ب د ، فيكون مجموع اب ، ب د عشرة < من > عدد وعُشر مال ، نقصنا منه ب د الذي هو الشيء يبقى عشرة < من > عدد وعُشر مال إلا شيئاً وهو اب ، فنضربه في مثله يحصل مائة من العدد وثلاثة أموال وعُشر عُشر < مال > مال إلا عشرين شيئاً وإلا خُمس مكعب يعادل مائة من العدد ومالاً . فيجبر ويقابل ويقاص يبقى مالان وعُشر عُشر < مال > مال يعدل عشرين شيئاً وخُمس مكعب . فيقسم الجميع على الشيء ليرجع إلى أقل أربعة أجناس على هذه النسبة ، فيخرج من القسمة عُشر عُشر مكعب وشيئان يعدل خُمس مال وعشرين من العدد . فيكمل عُشر عُشر مكعب بأن يضرب في مائة وكذلك جميع الأجناس نضربه في مائة فيحصل مكعب ومائتا شيء يعدل عشرين مالاً وألفين من العدد .

---

١ — مائة : مساويه — // ٨ — شيئا: شيء — // ١١ — ويقاص : هكذا في المخطوطة ، ولم نعثر حتى الآن على استعمال مشابه لهذه الكلمة في هذا الموضع والمقصود ويسقط من أصلها وهو المعنى الذى تتضمنه « المقابلة »

فقد أدى التحليل إلى معادلة أربعة أجناس ، وهذا لا يمكن أن يستنبط بالهندسة المسطحة لمكان المكعب ، ويحتاج فيها إلى القطوع المخروطات .

ومن قبل أن نخوض في إبانة مطلوبنا بالقطوع ، نقدم معنى يكون تحريضاً للناظر في هذه الرسالة على طلب العلوم وإتقان القدر الذي ننبه عليه ، وشكراً لنعم الله تعالى على بعض عباده ، فإن التحدث بالنعم شكر عظيم للمنعم كما أنزل : « وأما بنعمة ربك فحدّث » . فلا يظنن الناظر أن هذا كلام جرّه إلى هذا المقام حب المباهاة ، فإن ذلك من عادات الفجرة المتصلفة المعجبة ، وحق السّفلة الإعجاب ، فإن نفوسهم لا تسع إلا لتفطن شيء نزر من العلوم ، فلما أدركوه ظنوا أن ذلك القدر هو الذي حصر العلوم وجمعها ، ونعوذ بالله من أن تسوّل لنا أنفسنا آراء تتخبطنا وتمنعنا عن درك الحقائق والفوز بالنجاة .

أقول : إن الذي يسميه الجبريون مالَ مالٍ أمر موهوم في المقادير المتصلة ، ولا وجود لها في الأعيان بوجه من الوجوه ، وإنما يطلق على المقادير المتصلة لفظةُ مال المال ، ومال الكعب ، وكعب الكعب ، وما عداها من حيث إطلاق العدد عليها إذا تعددت . والمقادير تشترك في جنس الكمية على ما يتولى بيانه صاحب العلم الأعلى . فأما الأمور التي يستعملها الجبريون ولها وجود في الأعيان والمقادير المتصلة < فهي > أربعة : العدد والشيء والمال والمكعب :

أما العدد فهو أن يؤخذ العدد مجرداً عن المواد في العقل ، ولا يكون له وجود في الأعيان ، إذ العدد شيء / معقول كلي لا يوجد ٣-ب إلا متشخصا بالمواد .

وأما الشيء فمنزلته من المقادير المتصلة منزلة الخط المستقيم .

---

١٧ – تشترك : يشترك – // ١٩ – يستعملها : يستعمله

وأما المـــال فهو بمنزلة المربع المتساوي الأضلاع القائم الزوايـــا الذي ضلعه ذلك الخط المستقيم المطلق عايه لفظ الشيء .

والمكعب هو المجسم الذي يحيط به ستة سطوح مربعة متســـاوية ومتساوية الأضلاع وقائمة الزوايا ، الذي ضلعه الخط المستقيم المطلق عليه اسم الشيء ، وأحد سطوحه المربع المطلق عليه اسم المال ، فهو الحاصل من ضرب الشيء في مثله ، ثم ضرب المبلغ في الشيء . وقد بين عمله أقليدس وبرهن عليه في يز̄ من مقالة يج̄ من كتابه في الأصول .

وأما مالُ المال الذي هو عند الجبريين حاصل من ضرب المـــال في مثله فلا معنى له في المقادير المتصلة ، لأن المربع الذي هو سطح كيف يمكن أن يضرب في مثـــله ؟ إذ السطح مالَه بُعْدان ، وبعدان في بعدين أربعة أبعاد ، والجسم لا يمكن أن يكون له أكثر من ثلاثة أبعـــاد . فجميع الأشياء التي تخرج بالجبر إنما تخرج من هـــذه الأربعة الأجناس . ومن ظن من الناس أن الجبر حيلة في استخراج الأعـــداد المجهولة فقد ظن محالاً ، فلا تلتفت الى الظاهريّين المختلفين . بل الجبر والمقابلة أمور هندسية برهن عليها في مقالة ب̄ من الأصول في شكلي ه̄ و و̄ منه .

وأما من قال : مالُ مال وثلاثة أموال يعدل ثمانية وعشرين من العدد ، فنصّفَ الأموالَ وضربه في مثله وزاده العددَ وأخذ جذر المبلغ فكانت خمسة ونصف ، ونقص منه نصف الأموال ، فبقي أربعـــة وهو المال ، ومال المال ستة عشر ، ثم ظن أن مال المـــال استنبط بطريق الجـــبر : فهو ضعيف الظن جـــداً ، لأنه لم يستنبط مال المال بـــل استنبط المال . فكأنه مال وثلاثة أجذار يعدل ثمانية وعشرين ثم استخرج الجذر بالمقابلة الثانية وصادر على أن < مالَ > ذلك الجذر مالُ مالٍ ، وهذا سرّ تطلع منه على أسرار .

---

١٢ – تخرج : يخرج (الأولى والثانية) – // ١٤ – الظاهريين : الياء الأولى ممحوة

ونرجع الى ما كنا فيه :

نقول : إن الثلاثة الأجناس الأول ، أعني الأعداد والجذور والأموال عند المعادلة ترجع الى ست شعب : ثلاثة مفردة وثلاثة مقترنة .

ويمكن أن يعلم مجهولاته بالمقالة الثانية على ما هو مذكور مشروح في كتب الجبريين .

وأما إذا نُظر في المكعب وعودل بينه وبين سائره [و] احتيج حينئذ إلى المجسمات ، وخاصة المخروطات وقطوعها — لكون المكعب مجسما .

أما مفرداته فثلاثة : مكعب يعدل الأموال ، وهو الجذور تعدل الأعداد ، ومكعب يعدل الجذور ، وهو أموال تعدل الأعداد ، ومكعب يعدل الأعداد ، ولا سبيل إلى استنباطه إلا بالطرق العددية المعدة لاستخراج الكعاب ، وإما بالطرق الهندسية التي يعمل فيها مجسّم متوازي السطوح مساوياً لمجسم آخر متوازي السطوح مفروض .

٤ - ا ويفتقر في أمثال هذه الأعمال إلى قطوع المخروط / باضطرار ، أو إلى آلات عند من لا يعرف المخروطات . وأما مقترناته فهي صنفان : إما ثلاثي وإما رباعي . فالثلاثي : مكعب وأموال يعدل أعداداً ، ولا يخرج إلا بالقطوع ، ومكعب وأموال يعدل جذوراً ويكون حكمه حكم مال وجذور يعدل أعداداً . ومكعب وأعداد يعدل جذوراً ولا يخرج إلا بالقطوع ، ومكعب وأعداد يعدل أموالاً ولا يخرج إلا بالقطوع ، ومكعب وجذور يعدل أعداداً ولا يخرج إلا بالقطوع ، ومكعب وجذور يعدل أموالا ويكون حكمه حكم مال وعدد يعدل جذراً ، وأموال وجذور يعدل مكعباً ، ويكون حكمه حكم جذور وأعداد يعدل مالاً ، وأموال وأعداد يعدل مكعبا ، ولا يخرج إلا بالقطوع ، وجذور وأعداد يعدل مكعباً ولا يخرج إلا بالقطوع . فهذه تسعة أنواع ثلاثية : ثلاثة منها تخرج بثانية الأسطقسّات ، وستة منها لا تخرج إلا بقطوع

---

٦ — حينئذ : ح — // ٩ — تعدل : يعدل — / تعدل (الثانية) : يعدل

المخروط . وأما الرباعي : مكعب يعدل أموالا وجذورا وأعداداً ، مكعب وجذور وأعداد يعدل أموالاً ، مكعب وأموال وأعداد يعدل جذوراً ، مكعب وأموال وجذور يعدل أعداداً ، مكعب ومال يعدل جذوراً وأعداداً ، مكعب وجذور يعدل أموالا وأعداداً ، مكعب وأعداد يعدل أموالا وجذوراً . فهذه سبعة أنواع رباعية لا يخرج شيء منها إلا بقطوع المخروطات .

فقد حصل من المركبات ثلاثة عشر نوعاً لا تخرج إلا بقطوع المخروط ، ونوع من المفردات إلا بقطوع المخروط ، وهو مكعب يعدل أعداداً .

وأما المتقدمون الرياضيون من غير أهل لساننا فلم ينبهوا على شيء من هذا ، أو لم يصل إلينا ولم ينقل إلى لساننا . وأما المتأخرون من أهل لساننا فأول من اضطر إلى صنف ثلاثي من هذه الأصناف الأربعة عشر هو الماهاني المهندس ، فإنه كان يحل المقدمة التي أخذها أرشميدس مسلمة في شكل د من مقالة ب من كتاب الكرة والأسطوانة . وهي هذا الذي أذكره . قال أرشميدس : إن خطي ا ب ، ب جـ معلوما القدر ومتصلان على استقامة ، ونسبة ب جـ إلى جـ ه معلومة فيكون جـ ه معلوما على ما تبين في المعطيات . ثم قال : ونجعل نسبة جـ د إلى جـ ه كنسبة مربع ا ب إلى مربع ا د .



ولم يقل كيف نعلم هذا ، لأن هذا محتاج إلى قطوع المخروط باضطرار ولم يورد في الكتاب شيئاً مبنياً على القطوع إلا هذا ، فأخذ هذا أيضاً مسلماً . والشكل الرابع هو في قسمة الكرة بسطح مستوٍ

---

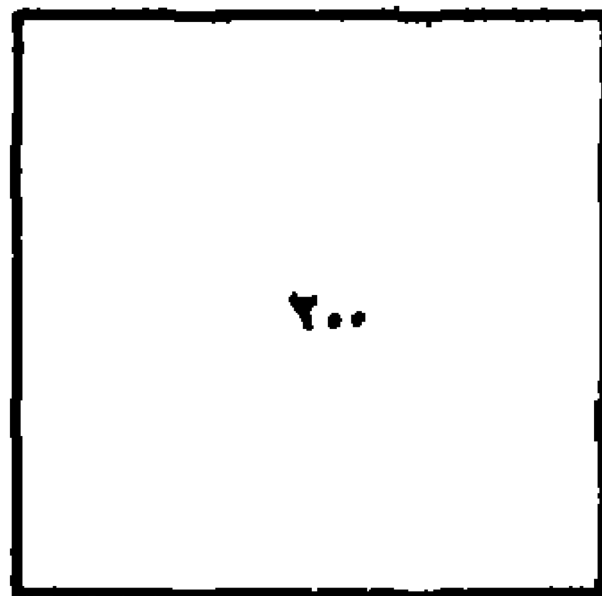
٧ – تخرج : يخرج – // ١١ – أو : الألف قصيرة وفوق السطر – // ١٧ – جـ د : ح د

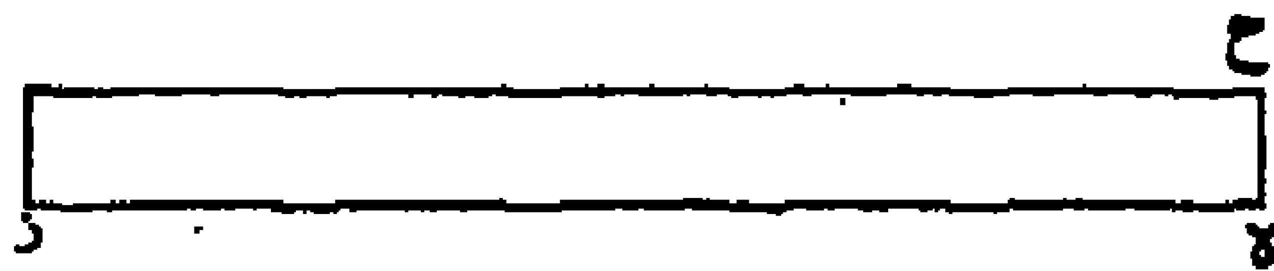
على نسبة معلومة . وكان الماهاني يستعمل ألفاظ الجبريين للتسهيل ؛ فلما ٤ـب أدى التحليل إلى أعداد وأموال وكعاب متعادلة ولم يمكنه / أن يستخرجه بقطوع المخروطات جزم القول بأن هذا ممتنع . فهذا الفاضل مع فضله وتقدمه في هذه الصناعة استبهم عليه حلّ صنف من هذه الأصناف ، حتى نبغ أبو جعفر الخازن وتنبّه على طريقه وأتى به في رسالة ، وأبو نصر بن عراق مولى أمير المؤمنين من أهل خوارزم كان يحل المقدمة التي أخذها أرشميدس في استخراج ضلع المسبع في الدائرة ، وهي < تقوم على > المربع بتلك الصفة المذكورة ، وكان يستعمل ألفاظ الجبريين فأدى التحليل إلى مكعب وأموال يعدل أعداداً فاستخرجه بالقطوع ، وهذا الرجل لعمرى كان من متعالي الطبقة في الرياضيات . والمسألة التي أعجزت أبا سهل الكوهي ، وأبا الوفاء البوزجاني ، وأبا حامد الصاغاني ، وجماعة من أصحابهم الذين كانوا منقطعين إلى جناب عضد الدولة بمدينة السلام هي هذه : عشرة قسمتها قسمين فكان مجموع مربعيهما مع الخارج من قسمة الكثير على القليل اثنين وسبعين عددا ، وكان يؤدي التحليل إلى أموال تعدل مكعباً وجذوراً وأعداداً . وهؤلاء الأفاضل كانوا متحيرين في هذه المسألة مدة مديدة حتى استخرجها أبو الجود ، وخزنوها في دار كتب الملوك السامانية . فهذه ثلاثة أصناف : اثنان منها ثلاثيان ، وواحد رباعي من المركبات والمفردة الواحدة أعني المكعب الذي يعدل الأعداد ، فإنها قد استخرجها من تقدمنا من الأفاضل ، ولم يصل إلينا منهم كلام في العشر البواقي ولا في هذا التفصيل . فإن تراخت المدة وصحبني التوفيق ، أودعتُ هذه الأصناف الأربعة عشر بجميع شُعبها وفروعها وتمييز الممكن منها من الممتنع — فإن بعض أصنافه مفتقر إلى شرائط حتى يصح — رسالةً شاملة على عدة مقدمات لها ، عظيمةَ المنفعة في أصول هذه الصناعة ، معتصماً بحبل التوفيق من الله ومتوكلاً عليه ، إنه المستعان على جميع

١٢ — الصاغاني : الصغاني — // ١٣ — السلام : السلم — // ١٥ — تعدل : يعدل

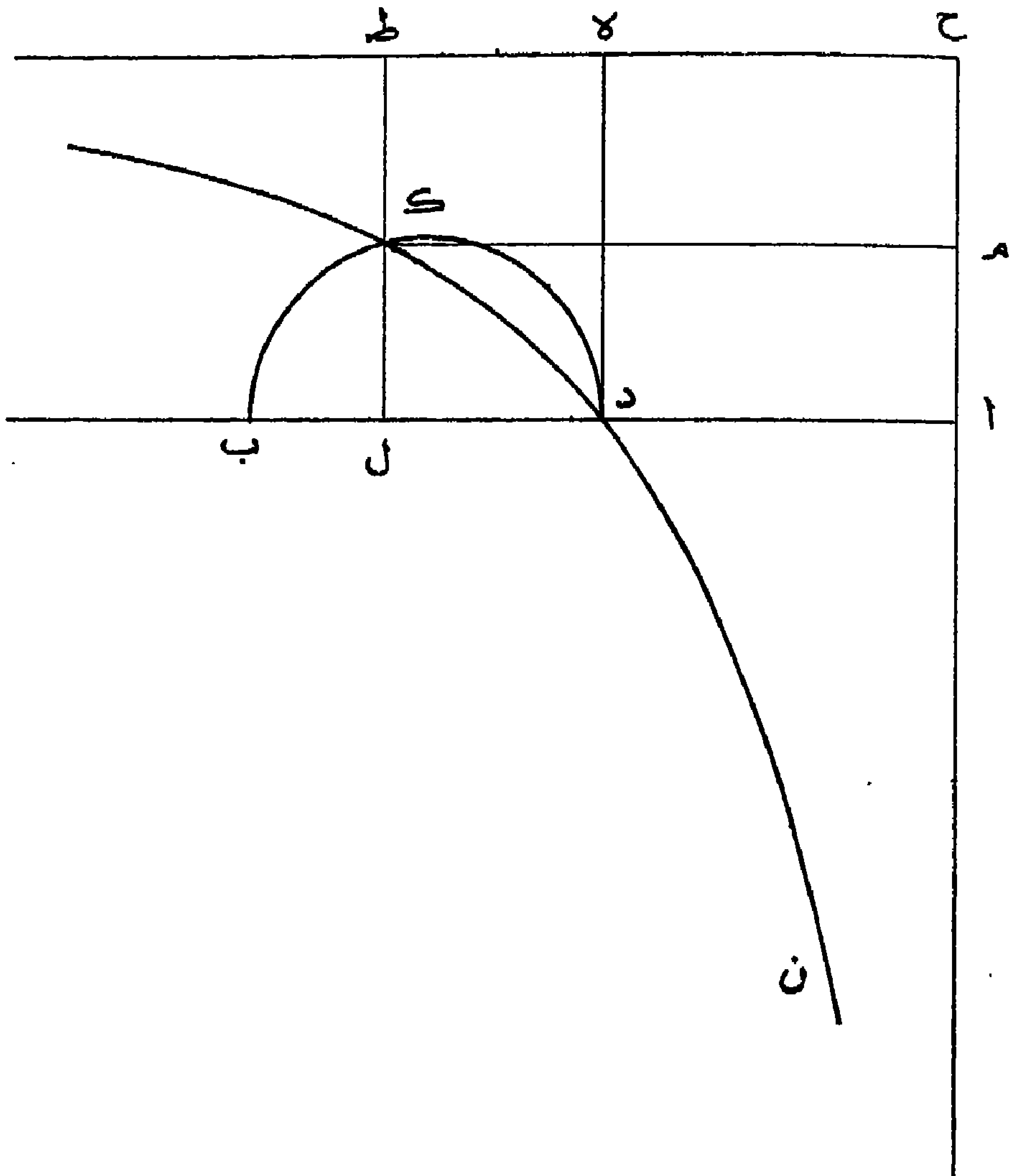
الأمور ، وبه الحول والقوة جلّت عظمته .

وسنرجع إلى مسألتنا هذه بعد تمهيد هذه المقدمات وهي : طلب مكعب يكون مع ماتَي ضلعه عديلا لعشرين مربع ضلعه مع ألفين من العدد . نضع خط اب مساوياً لعدد المربعات وهو عشرون ، وخطّ هز مائتين ، وخط هح واحداً فيكون سطح حز مائتين ، ونجعل مربعاً مساويا لسطح حز على ما تبين في شكل يد من مقالة ب ، وليكن ضلع ذلك المربع مثل اح ، و اح عمود على اب وهو جذر مائتين و اد هو خارج القسمة إذا قسم العدد على عدد الجذور وهو عشرة ، لأن العدد ألفان / وعدد الجذور مائتان . وإذا قسم الألفان على مائتين ٥ ـ ا يخرج عشرة و دب أيضا عشرة . ونعمل على دب نصف دائرة دكب ونخرج ده يوازي اح ونتمم سطح اه ونعمل قطعا زائداً يمرّ على نقطة د ولا يلقى خطي اح ، حه كما بيّنه أبلونيوس الفاضل في الشكل نط من المقالة الأولى من كتاب المخروطات ، والشكل ه و و من المقالة الثانية من ذلك الكتاب . إذ هذا العمل لا يتم إلا بهذه الاشكال الثلاثة ، وهو قطع ندك يقطع الدائرة على نقطة ك ، ونخرج من نقطة ك عمود كل على اب . فأقول : إن ضلع ال هو ضلع مكعب يكون مع ماتَي ضلعه عديلا لعشرين مربع ال مع ألفين من العدد .





٣ ـ لعشرين مربع ضلعه : أي لعشرين مربعا لضلعه ، وسنتركها كما هي في المخطوطة
٥ ـ مائتين : مائتان ـ // ١٢ ـ اح ، حه : اجـ جـه



برهانه : إنا نخرج ل ك على استقامته حتى يقطع خط ح ه على نقطة ط ونخرج ك م يوازي ا ل ، فلأن ك ط يوازي د ه و ك م يوازي ا د ، يكون سطح ا ه القائم الزوايا مساوياً لسطح ك ح القائم الزوايا لأن نقطتي ك ، د على محيط قطع زائد لا يلقاه خطا ا ح ، ح ط ، وقد خرج من كل واحدة منها خطان إلى الخطين اللذين ٥

٤ ، ٥ – ا ح ، ح ط : ا ج ، ج ط

لا يلقيان <القطع الزائد> موازيين لنظيريهما الخارجين من النقطة الأخرى ، وقد برهن عليه أبلونيوس الفاضل في شكل جـ من مقالة ب من كتاب المخروطات . ودائرة د ك ب معلومة الوضع لأن قطرها الذي هو د ب معلوم الوضع والقدر ، وخطا ا ح ، ح ط معلوما الوضع ، ونقطة <ن> معلومة الوضع فيكون قطع ن د ك معلوم الوضع . ودائرة د ك ب معلومة الوضع فيكون نقطة ك معلومة الوضع ، وخط ك ل يكون معلوم الوضع ، فيكون نقطة ل معلومة الوضع . ونقطة ا معلومة الوضع فيكون خط ا ل معلوم القدر . وهذه أشياء ظاهرة من كتاب المعطيات . وقد بيّنا أن سطح ا هـ مثل سطح ك ح ، فيُلقى هـ م المشترك ، يبقى سطح د م مثل ك هـ ، ونجعل سطح د ك مشتركاً فيكون سطح ا ك مساوياً لسطح د ط وهما متساويا الزوايا ، لأن زواياهما قوائم ، فيكون أضلاعهما متكافئة في النسبة كما بينه أقليدس في شكل يد من مقالة و ، يكون نسبة ا ل إلى ل ط كنسبة د ل إلى ل ك ، فيكون مربعاتها أيضا متناسبة ، ونسبة مربع ا ل إلى مربع ل ط كنسبة مربع د ل إلى مربع ل ك ، ونسبة د ل إلى ل ك كنسبة ل ك إلى ل ب ، فيكون نسبة مربع د ل إلى مربع ل ك كنسبة د ل إلى ل ب ، فيلزم أن يكون نسبة مربع ا ل إلى مربع ل ط كنسبة د ل إلى ل ب ، فيكون ضرب مربع ا ل في خط ل ب مساوياً لضرب مربع ل ط في خط د ل . ونجعل ضرب مربع ل ط في ا د مشتركاً ، فيكون ضرب مربع ل ط في ا ل مساوياً لضرب مربع ل ط في ا د وضرب مربع ا ل في ل ب ، لكن مربع ل ط هو مثل عدد الأضلاع ، أعني مائتين و ا ل هو ضلع المكعب ، فيكون مائتا ضلع / المكعب مساوياً لضرب ه‍-ب
مربع ل ط في ا د وضرب مربع ا ل في ل ب ، وضرب مربع ل ط في ا د مساويا للعدد كما قدمنا وهو ألفان . فيكون ألفان من العدد وضرب مربع ا ل في ل ب مساويا لمائتي ضلع المكعب . ونجعل مكعب

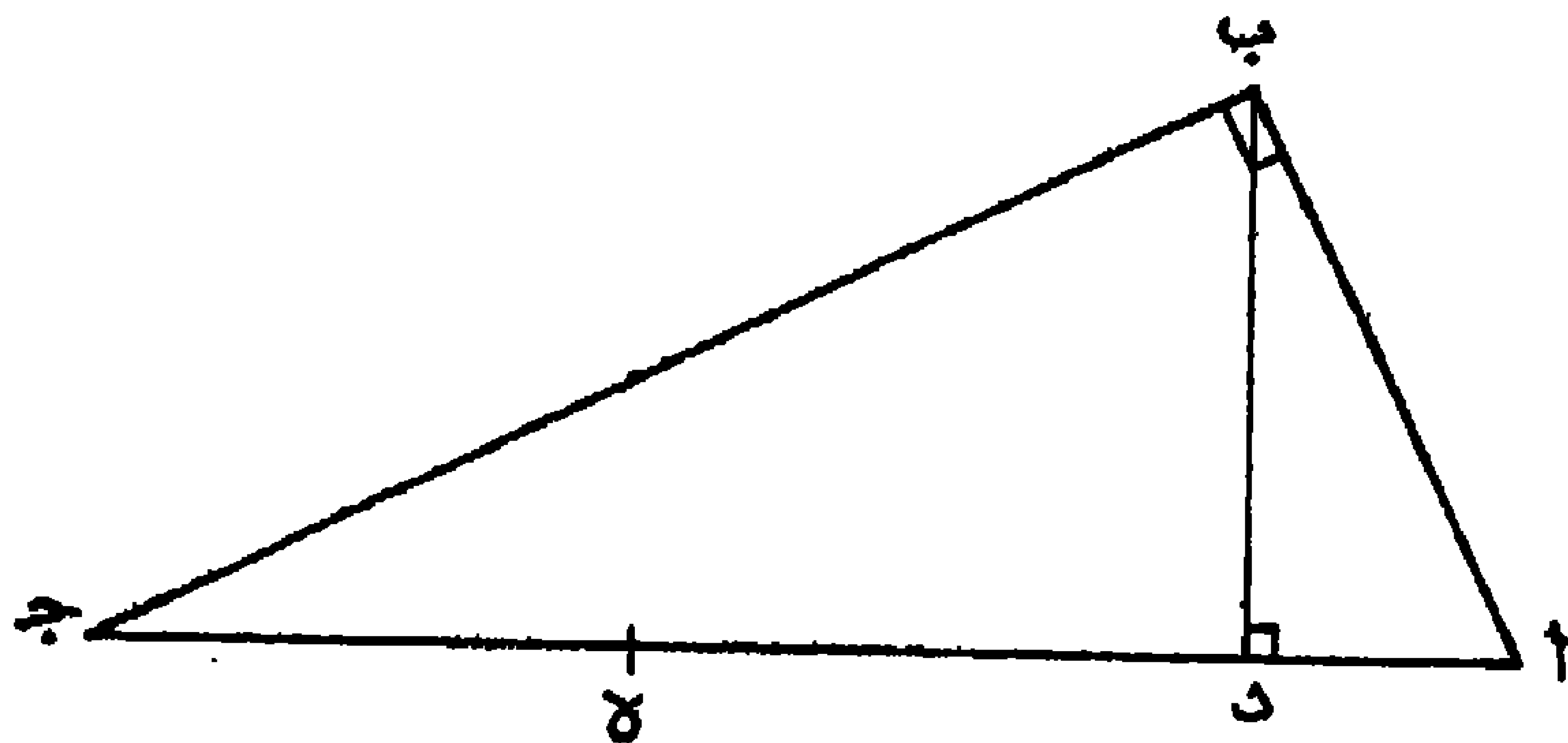
---

٤ – ا ح ، ح ط : ا ج جـ ط // ٢٠ – ا ل : ل ط

ا ل الذي هو ضرب مربع ا ل في ا ل مشتركاً ؛ فيكون مكعب ا ل < مع مائتين من ضلع المكعب > مساوياً لألفين من العدد مع ضرب مربع ا ل في ا ل وضرب مربع ا ل في ل ب . وضرب ا ل في ا ل مع ضرب مربع ا ل في ل ب هو مساوٍ لضرب مربع ا ل في ا ب ، و ا ب قد فرضناه عشرين ، فضرب مربع ا ل في ا ب هو عشرين مربع ا ل ، فيكون مكعب ا ل مع مائتي خط ا ل مساوياً لألفين من العدد مع عشرين مربع ضلع المكعب ، وذلك ما أردنا أن نبيّن .

ومن بعد ما تقدم هذا ، فإنا نشيد مثلث ا ب ج ونضع ا د مُنطقاً وهو عشرة ؛ يكون د ب هو خط ا ل الذي برهنا على أنه معلوم القدر . ولست أعني بقولي معلوم القدر أنه معلوم الكمية فإن بينهما فرقاً ، بل أعني بقولي معلوم القدر ما عني به أُقليدس في كتاب المعطيات ، وهو الذي يمكن أن يوجد مقدارٌ مساوٍ له .

وبالتركيب نضع خط ا د عشرة ، ونضع ب د قائماً على خط ا د على زوايا قائمة ومساوياً لخط ا ل من الشكل المتقدم ، ونصل ا ب ونقيم على نقطة ب عمود ب ج ونخرج ا د على استقامته حتى يقطع العمود على نقطة ج ، فباضطرار يجب أن يكون مثلث ا ب ج قائم الزاوية ، أعني زاوية ب منه قائمة ، ويكون خط ا ب مع عمود ب د مساوياً لوتر ا ج ، وخط ا ب مع خط ا د مساوياً لخط ب ج ، وذلك ما أردنا أن نبيّن .



ونعيد ربــع دائرة ا ب من دائرة ا ب جـ د ، ونخرج فيها قطري ا جـ ، ب د يتقاطعان على زوايا قائمــة ، ومركز الدائرة نقطــة هـ ، ونفصل من خط جـ د <من> مثلث ا ب جـ في الشكل المتقدم خط جـ هـ مساوياً لعمــود ب د ، ونقسم نصف قطر الدائرة — الذي هــو خط هـ ب من هــذا الشكل على نسبة ا د إلى د هـ من مثلث ا ب جـ المتقدم كما بينه أقليدس في شكل هـ من مقــالة و — على نقطة ح ، ونخرج عمود ح ز ونصــل هـ ز ، ونخرج من نقطــة ز خطا يماس الدائرة وهو خط ز ط ونخرج هـ ب على استقامته إلى أن يقطع خط ز ط على نقطــة ط ، فيكــون مثلث هـ ز ط شبيهاً بمثلث ا ب جـ من الشــكل المتقدم .

برهانه : إن زاوية ز هـ ح مساوية لزاوية ب ا جـ ، فإن لم يكن ، فلتكن إحداهما أعظم ، مثل ب ا جـ ، فنقيم على نقطة هـ من خط هـ ب زاوية مثــل زاوية ب ا جـ وهي ك هـ ل ، / ونخرج من نقطة ك خطــاً ٦ ـ أ
يماس الدائرة وهــو ك ل يقطع هـ ط على نقطة ل فيكون مثلث هـ ك ل شبيهاً بمثلث ا ب جـ لأن زواياهما متساوية ، ونخرج من نقطة ك عمــود ك م على هـ ب فيكون هـ ك ، ك م جميعــاً مساوياً لخـط هـ ل ، و هـ ب مثل هـ ك ، يكون ب ل مثل ك م ، ونسبة ل م إلى ك م كنسبة جـ د إلى د ب ، فيكون نســبة م ل إلى ل ب كنسبة د جـ إلى جـ هـ . وبالتفصيل يكون نسبة م ب إلى ب ل كنسبة د هـ إلى هـ جـ ، ونســبة هـ جـ — الذي هو مثل د ب — إلى د ا كنسبة ب ل — الذي هــو مثل ك م — إلى م هـ ، ففي نسبة المساواة يكون نسبة هـ م إلى م ب كنسبة ا د إلى د هـ . وقــد كنا جعلنا نسبة هـ ح إلى ح ب كنسبة ا د إلى د هـ ، فيكون نسبة هـ م إلى م ب كنسبة هـ ح إلى ح ب . و هـ م الأول أصــغر من هـ ح الثــالث ، يلزم أن يكون م ب الثــاني أصغر من ح ب الرابع عــلى

---

١٢ – إحداهما : الدال متصلة بالهاء والألف فوق السطر – // ١٨ – ل ب : د ب
٢٢ – هـ ح : هـ جـ – / ح ب : جـ ب – // ٢٣ – هـ ح : هـ جـ

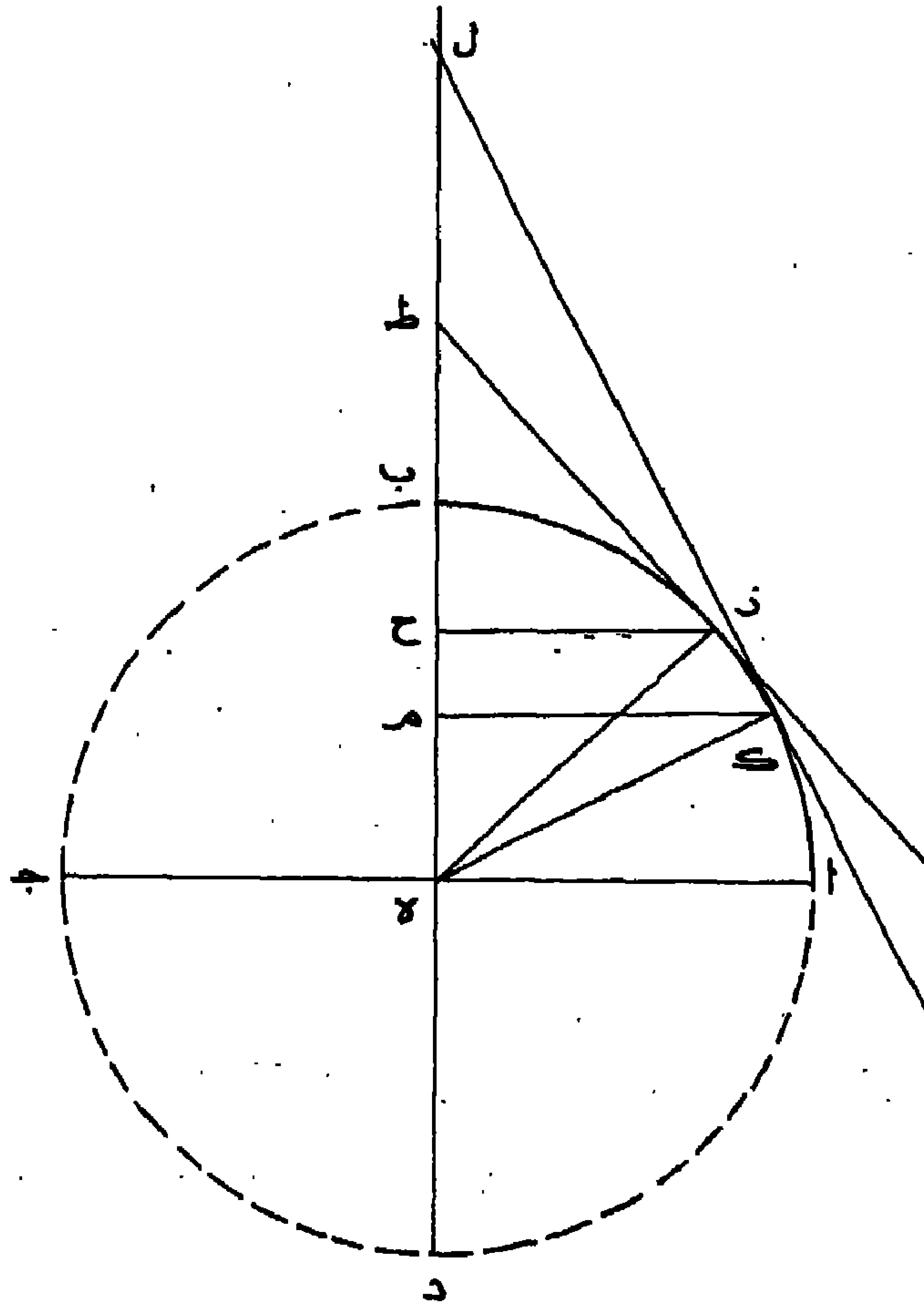
ما تبيّن في خامسة الأصول في شكل يدَ منها ، إلا أنه أعظم ، فهذا محال . فليست زاوية زهح بأصغر من زاوية باج من مثلث ابج المتقدم ولا أكبر منها أيضاً ، فيكون مثلث زهح شبيها بمثلث ابج المتقدم ، فيكون هز زح جميعا مثل هط ، فيكون بط مثل زح وضرب دح في حب مثل مربع حز ، وكذلك ضرب هح في حط مساوياً لمربع حز ، فيكون ضرب دح في حب مثل ضرب هح في حط ، فيكون الخطوط الأربعة متناسبة على ما تبيّن في شكل يو من مقالة د ، فنسبة دح الأول إلى حه الثاني كنسبة حط الثالث إلى حب الرابع . وبالتفصيل : يكون نسبة ده إلى هح كنسبة بط إلى بح ، و ده مثل اه ، و بط مثل زح فيكون نسبة اه إلى هح كنسبة زح إلى حب ، وبالتبديل يكون نسبة اه إلى زح كنسبة هح إلى حب .

فقد قسمنا ربع دائرة بقسمين على نقطة ز وأخرجنا منها عمود زح حتى صارت نسبة اه الذي هو نصف القطر إلى زح كنسبة هح إلى حب ، وذلك ما أردنا أن نبينّ .

ومن أراد أن يعلم بالحساب فلا سبيل له إليه إذا حاول التحقيق ، فإن الأشياء التي تستخرج بقطوع المخروطات لا يمكن فيها أن يحلل إلى الحساب ، وإن قنع بالتخمين فعليه بجداول الأوتار من كتاب المجسطي أو جداول الجيوب والسهام من زيج معتمد ، ويطلب فيه قوساً ، يكون نسبةُ ستّينَ — الذي هو نصف قطر الدائرة فرضاً — إلى جيبها كنسبة جيب تمامها إلى سهمها . ونجد تلك القوس قريبة من نز درجةً بالأجزاء التي بها الدائرة شس ، وجيبها قريب من ن جزءاً وسهمها قريب من كز جزءاً وثُلث جزء ، وجيب تمامها قريب من

---

٢ – محال : مح // ٥ – ح ب : جب – // ٧ – ح ط : جب – // ١٥ – ح ب :
جب – // ١٧ – تستخرج : يستخرج – / يمكن : يكن – // ٢١ – تلك : ذلك



اثنين وثلاثين جزءاً وثلثي جزء ، ويمكن أن يبالغ في التدقيق حتى يقل التفاوت بحيث لا يحس . —

فهذا هو الذي سنح في هذا المعنى مع تقسم الفكر وتوزع الخاطر وافتتان الأشغال العائقة عن أمثال هذه الجزئيات . ولولا شرف المجلس / ٦-ب دام شرفه ، وحق السائل أدام الله تأييده ، لكنت عنها في منحـــرف واسع . إذ عنايتي مقصورة على ما هو أهم من أمثال هذه عندي ، وهمتي مصروفة إليه . والله تعالى المحمود والمشكور على كل حـــال ، والمأمول منه أن يوفق للخيرات إنه ولي الاجابة .

تمت الرسالة والصلاة على خاتم الرسالة .

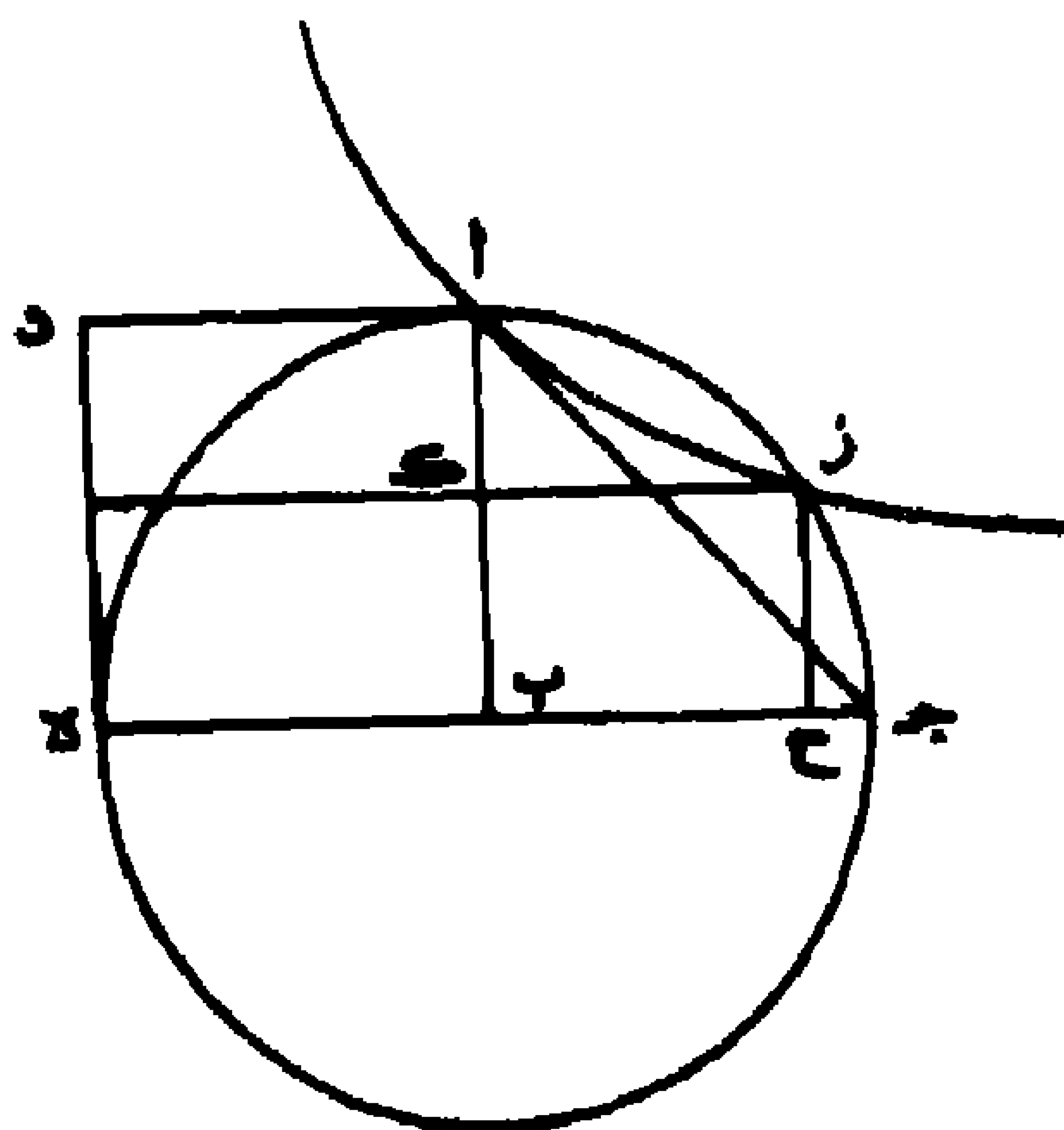
---

٧ — تعالى : تعل

مسألة

ربع دائرة ا ج مفروض على مركز ب ، ونريد أن نقسم ا ب بقسمين كما عرفته . فإنا نعمل على ا ب مربعاً متساوي الأضلاع والزوايا وهو ا ه ، فيكون خطا ب ه ه د معلومي الوضع ونقطة ا معلومة الوضع ، فنعمل على نقطة ا قطعاً زائداً لا يلقاه خطا ب ه ه د ، وهو قطع ا ز ، فيكون معلوم الوضع ، ونصل ا ج فهو لا محالة يكون مماساً للقطع وهو داخل الدائرة ، فيلزم أن يقطع القطع الزائد الدائرة ، فليقطعها على نقطة ز ، فتكون معلومة الوضع ، ونخرج عمودي ز ح ز ك ، فأقول : قد تم العمل .

برهانه : إن نقطتي ا ز على محيط القطع ، وقد أخرج من كل واحدة منهما خطان إلى < الخطين اللذين لا يلقيان > القطع موازيان للآخرين ، فيكون سطح ز ه مساويا لسطح ا ه ، ونلقي ك ه المشترك ، يبقى ك ح مثل ك د ، وهما سطحان متساويا الزوايا ، فيكون أضلاعهما متكافئة : نسبة ا د إلى ك ز كنسبة خط ب ك إلى ك ا .



تمت

١ – مسألة : تعقب هذه المسألة في المخطوطة نص الخيام دون أن تُنسب إليه وكذلك دون أن تنسب إلى غيره . ولقد رأينا إلحاقها بالنص كما هو الحال في المخطوطة مع التحفظ التام على هوية مؤلفها .

٦ – لا محالة : لا محة . // ٧ – فتكون : فيكون // ٩ – ا ز : ا ز / واحدة : واحد

١٢ – أضلا عهما : أضلاعها .

فهارس الكتاب

فهرست(١) أهم المصطلحات

(١) إذا وردت الكلمة في أكثر من عشرة مواضع أثبتنا الأولى منها فقط .

فهرست الأسماء والأماكن والكتب

INDEX DES NOMS PROPRES DES LIEUX ET DES OUVRAGES

INDEX DES MOTS[1]

(1) Si un terme apparait plus de dix fois, on ne note que les premières références.

bes, mais pas encore numériquement. En effet, comme il l'affirme lui-même, il ne possède pas encore une méthode pour résoudre par radicaux l'équation cubique.

Ici, il va cependant essayer, à défaut d'une telle solution, de donner une solution numérique approchée.

Sa méthode consiste à chercher un arc de cercle α d'un cercle de rayon 60 (c'est l'arc BG de la figure) tel que:

$$\frac{AE}{GH} = \frac{EH}{HB}$$

c'est-à-dire tel que

$$\frac{60}{\sin \alpha} = \frac{\mathrm{Cos}\ \alpha}{60 - \mathrm{Cos}\ \alpha}$$

avec

$$\mathrm{Sin}\ \alpha = R.\sin \alpha = 60 \sin \alpha$$

$$\mathrm{Cos}\ \alpha = R.\cos \alpha = 60 \cos \alpha$$

et il trouve 57° comme valeur approchée de l'angle correspondant à l'arc.

La circonférence valant 360°, il trouve au moyen des tables trigonométriques:

$$\sin \alpha \approx \frac{50}{60} \approx 0{,}8386$$

$$\cos \alpha \approx (32 + \frac{2}{3}) \cdot \frac{1}{60} \approx 0{,}5446$$

$$1 - \cos \alpha \approx (27 + \frac{1}{3}) \cdot \frac{1}{60} \approx 0{,}4554$$

Il affirme que l'on peut améliorer l'approximation autant que l'on veut.

$$MB + ME = HB + HE \text{ et } ME < HE$$

donc $\measuredangle\, BAC = \measuredangle\, GEH.$

En fait on en conclut que $\measuredangle\, BAC \leqslant \measuredangle\, GEH$; mais al-Khayyām remarque que si on suppose $\measuredangle\, BAC < \measuredangle\, GEH$, on retombe sur une absurdité par une démonstration analogue. Donc les deux triangles BAC (de la figure 4) et GEI (de la figure 7) sont semblables.

Donc on a: $\dfrac{EG}{BA} = \dfrac{GH}{BD} = \dfrac{EI}{AC}$

d'où $\dfrac{EG + GH}{BA + BD} = \dfrac{EI}{AC}$

or $BA + BD = AC$

donc $EG + GH = EI$

donc $BI = GH$

d'autre part $DH.HB = \overline{HG}^2$

donc $DH.HB = EH.HI$

d'où $\dfrac{DH}{HE} = \dfrac{HI}{HB}$

donc $\dfrac{DE}{EH} = \dfrac{BI}{BH}$

mais $DE = AE$ et $BI = GH$

alors $\dfrac{AE}{EH} = \dfrac{GH}{HB}$

donc $\dfrac{AE}{GH} = \dfrac{EH}{HB}$

III– *Solution numérique approchée*

Al-Khayyām a montré que la division d'un quart de cercle en un point G tel que:

$$\frac{EA}{GH} = \frac{EH}{HB}$$

se ramène, grâce à la traduction algébrique, à l'équation cubique (3). Or, il sait résoudre une telle équation par l'intersection de deux cour-

Soit $\measuredangle\, KEB = \measuredangle\, BAC.$

Complètons le triangle LEK (figure D-8) en traçant la tangente au cercle LK, qui coupera le prolongement de EI en L. Les deux triangles LKE et ABC sont semblables.

Soit $KM \perp EL$ (et M sur EL).

On a donc: $EK + KM = EL$

et $$\frac{LM}{KM} = \frac{CD}{DB}$$

donc $$\frac{LM}{LB} = \frac{DC}{CE}$$

car $KM = LB$ et $CE = DB$

mais $$\frac{MB}{BL} = \frac{DE}{EC} \qquad (1)$$

car $$\frac{LM}{LB} = \frac{LB + MB}{LB} \text{ et } \frac{DC}{CE} = \frac{CE + ED}{CE}$$

d'autre part $$\frac{BL}{ME} = \frac{EC}{AD} \qquad (2)$$

car $$\frac{EC}{AD} = \frac{BD}{DA} = \frac{MK}{ME} = \frac{LB}{ME}$$

d'où, en multipliant deux à deux les membres des relations (1) et(2):

$$\frac{EM}{MB} = \frac{AD}{DE}$$

Mais on a supposé que:

$$\frac{EH}{HB} = \frac{AD}{DE}$$

d'où $$\frac{EM}{MB} = \frac{EH}{HB}$$

mais $EM < EH$ car par hypothèse: $\measuredangle\, KEB > \measuredangle\, GEB$; donc $\measuredangle\, MKE < \measuredangle\, HGE$

donc: $MB < HB$

or $MB > HB$, car:

$$\overline{AL}^2 . LB = \overline{LI}^2 . DL$$

$$\overline{AL}^2 . LB + \overline{LI}^2 . AD = \overline{LI}^2 . DL + \overline{LI}^2 . AD$$

d'où $$\overline{AL}^2 . LB + 2000 = \overline{LI}^2 . AL = 200AL$$

donc $$\overline{AL}^3 + \overline{AL}^2 . LB + 2000 = \overline{AL}^3 + 200AL$$

$$\overline{AL}^2 (AL + LB) + 2000 = \overline{AL}^3 + 200\,AL$$

et finalement $$20X^2 + 2000 = X^3 + 200X.$$

Construction du triangle ABC (figure D-7)

On va construire le triangle ABC avec $AD = 10$, vérifiant:

$$AB + BD = AC.$$

Traçons $AD = 10$ et prolongeons-le; soit $BD \perp AD$ tel que:

$$BD = AL$$

AL étant la solution de (3). Joignons AB et, de B, abaissons la perpendiculaire à AB; elle coupe le prolongement de AD en C. Alors le triangle ABC vérifie nécessairement:

$$AB + BD = AC$$

et $$AB + AD = BC.$$

On construit le cercle ($ABCD$) (figure D-8). On trace les deux diamètres perpendiculaires qui se coupent en E.

Soit, sur la figure D-7, le point E vérifiant: $CE = BD$. Soit, sur la figure D-8, le point H de EB vérifiant:

$$\frac{HE}{HB} = \frac{AD}{DE}$$

(AD et DE étant des éléments du triangle ABC de la figure D-7.)

Soit $HG \perp EB$, G sur le quart de cercle (ABE). Soit IG la tangente au cercle en G. Elle coupe le prolongement de EB en I.

Alors le triangle ABC de la figure D-7 et le triangle EGI de la figure D-8 sont semblables. En effet, on a:

$$\measuredangle\, GEH = \measuredangle\, BAC.$$

Supposons le contraire: $\measuredangle\, BAC > \measuredangle\, GEH$. (figure D-8)

d'où $$X^3 + 200X = 20X^2 + 2000. \qquad (3)$$

Si donc X représente la hauteur d'un triangle rectangle vérifiant :

$$AB + X = AC$$

alors X est solution de l'équation du troisième degré (3).

Résolution de l'équation du 3^e^ degré: (figure D-6)

Soit $AB = 20$, $EG = 200$, $EH = 1$.

Soit $AH \perp AB$ et $AH = \sqrt{200}$, $AD = 10 = \frac{2000}{200}$

Soit E le quatrième sommet du rectangle $(ADEH)$.

Soit (DKB) un demi-cercle (C) de diamètre DB; (H) l'hyperbole passant par D et admettant EH et AH pour asymptotes. (H) coupe (C) en K. Soit $LK \perp AB$. Alors AL est la racine cherchée.

Démonstration:

Soit $KM \perp AH$ et $LKI \perp EH$.

Puisque $K \in (H)$ et $D \in (H)$, on a :

$$IK.KM = ED.DA$$

d'où $$IK.KM - EH.HM = ED.DA - EH.HM$$

donc $$IK.IE = AD.MA$$

d'où $$IK.IE + KL.LD = AD.MA + KL.LD$$

on a donc $$IL.LD = KL.AL$$

d'où $$\frac{AL}{LI} = \frac{LD}{KL}$$

donc $$\frac{\overline{AL}^2}{\overline{LI}^2} = \frac{\overline{LD}^2}{\overline{LK}^2}$$

Mais $$\frac{DL}{LK} = \frac{LK}{LB} \text{ (puissance de } K \text{ par rapport à } (C))$$

d'où $$\frac{\overline{DL}^2}{\overline{KL}^2} = \frac{DL}{LK} \cdot \frac{LK}{LB} = \frac{DL}{LB}$$

donc $$\frac{\overline{AL}^2}{\overline{LI}^2} = \frac{DL}{LB}$$

car, par hypothèse $\frac{ED}{GH} = \frac{EH}{HB}$

et d'après l'analyse $IB = HG$

donc $\frac{DH}{HE} = \frac{IH}{BH}$

d'où $\frac{DH}{HI} = \frac{HE}{BH} = \frac{EG}{GH} = \frac{GI}{HI}$

car les triangles EGI et GHI sont semblables.

Donc $DH = GI$ et $HD = EG + HE$

d'où $GI = EG + HE.$

Construction d'un triangle rectangle ABC, de sommet de l'angle droit B et vérifiant:

$$AB + BD = AC\,.$$

Analyse: (figure D-4)

Soit $AD = 10$, $BD = X$.

On a $\overline{AB}^2 = X^2 + 100.$

Les deux triangles ABC et ADB sont semblables; on a donc

$$\frac{AC}{AB} = \frac{AB}{AD}$$

d'où $AC.AD = \overline{AB}^2$

d'où $\frac{\overline{AB}^2}{10} = \frac{X^2}{10} + 10 = AC.\frac{AD}{10} = AC.$

Mais $AC = AB + BD$

donc $\frac{X^2}{10} + 10 = AB + BD$

d'où $AB = \frac{X^2}{10} + 10 - X$

donc $\overline{AB}^2 = (\frac{X^2}{10} + 10 - X)^2$

et enfin $X^2 + 100 = 100 + 3X^2 + \frac{X^4}{100} - 20X - \frac{X^3}{5}$

Mais $GE = EB$

d'où $EG + GH = EI$

G sera donc connu dès que BI est connu, c'est-à-dire dès que l'on pourra construire une tangente au cercle. Celle-ci déterminera un triangle rectangle tel que son hypoténuse soit égale à la somme d'un côté de l'angle droit et de la hauteur abaissée sur l'hypoténuse. On pourra alors par "synthèse géométrique" construire le point G.

Propriétés du triangle:

1– Le triangle EGI n'est pas isocèle.

Supposons qu'il soit isocèle; on aurait

$EG = GI$, donc $EH = HI$

or $\overline{HG}^2 = EH.HI$

donc $HG = EH = HI$

on a donc $EG + GH > EH + GH$ (car EG hypoténuse dans EHG)

donc $EG + GH > EH + HI$

d'où $EG + GH > EI$

ce qui est contraire à l'hypothèse: $EG + GH = EI$.

2– Dans le triangle EGI: $EG < GI$.

Supposons que $EG > GI$; on aurait $EH > HI$

mais $\frac{EH}{HG} = \frac{HG}{HI}$

d'où $HG > HI$

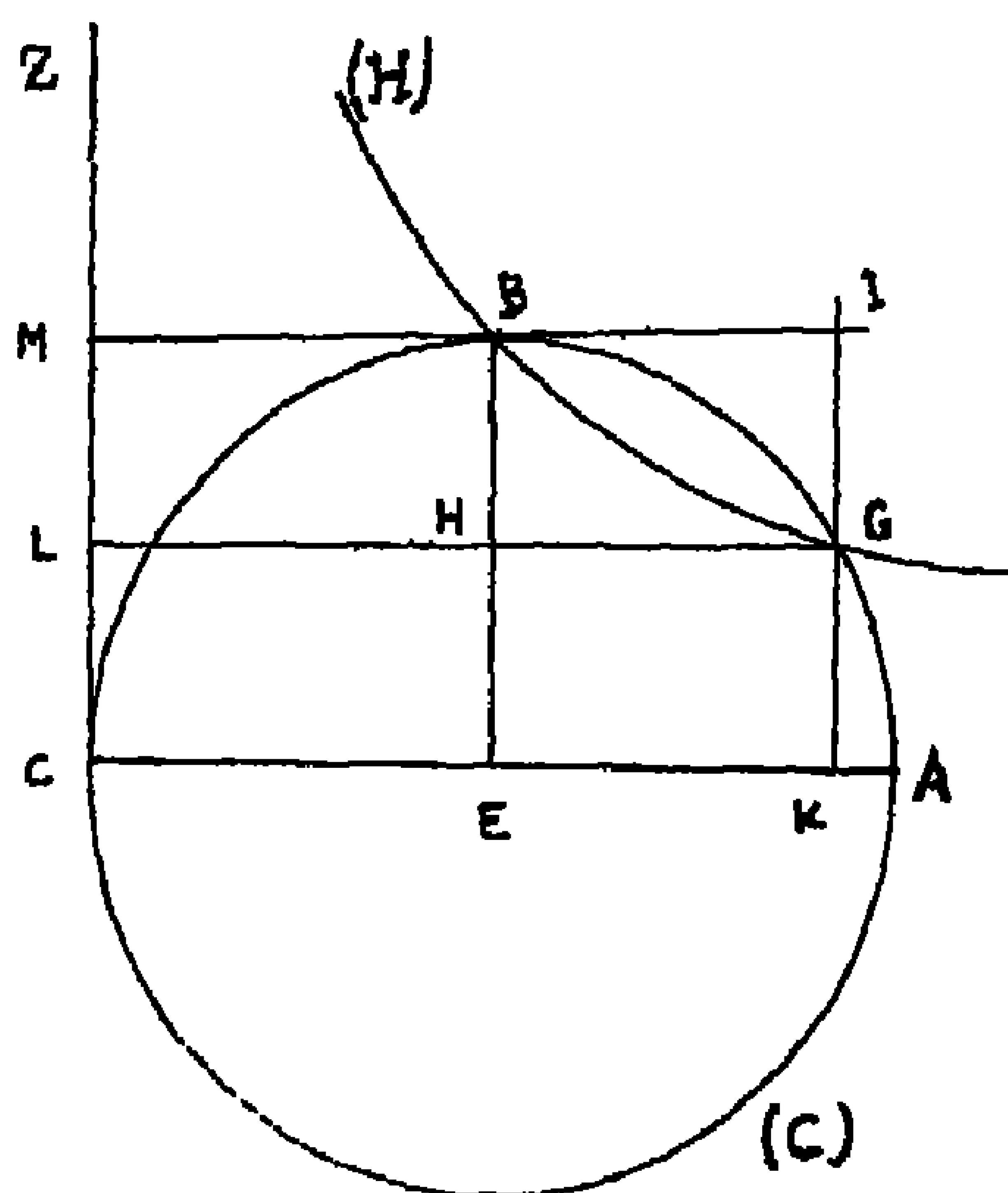
mais $HG = BI$ d'après l'analyse.

Donc $BI > HI$ et $HI = BI + HB$

ce qui est absurde; d'où le résultat.

3– Dans le triangle EGI : $IG = EG + HE$.

On a $\frac{ED}{EH} = \frac{IB}{BH}$



Le triangle EGI est rectangle. On a alors:

$$\frac{EH}{HG} = \frac{HG}{HI} \quad \text{d'après VI-8 des } \textit{Eléments}$$

d'où $$HG^2 = EH.HI\,.$$

Mais $G \in (C)$, donc:

$HG^2 = DH.HB$. (puissance de H par rapport au cercle)

On a donc $$DH.HB = EH.HI$$

d'où $$\frac{HD}{EH} = \frac{HI}{HB}$$

c'est-à-dire: $$\frac{EC + EH}{EH} = \frac{BI + HB}{HB}$$

donc $$\frac{EC}{EH} = \frac{BI}{BH}$$

d'où $$\frac{GH}{HB} = \frac{BI}{HB}$$

car $$\frac{GH}{HB} = \frac{AE}{EH} = \frac{EC}{EH} = \frac{BI}{HB}$$

On a donc $$GH = BI$$

(2) est l'équation d'une hyperbole équilatère ayant pour asymptotes les droites EA et CZ. Elle passe par $B(0,r)$. Notons (H) cette hyperbole, (C) le cercle.

$$G \in (H) \Rightarrow Y(X+r) = r^2$$

$$G \in (C) \Rightarrow X^2 + Y^2 = r^2$$

d'où

$$X^2 + \frac{r^4}{(X+r)^2} = r^2$$

et il vient

$$X^4 + 2rX^3 - 2r^3X = 0.$$

La racine évidente $X = 0$ correspond au point B.

On a donc

$$X^3 + 2rX^2 - 2r^3 = 0 \qquad (3)$$

Posons $X' = \frac{r}{X}$, alors (3) se réécrit:

$$X'^3 - X' - \frac{1}{2} = 0$$

Comme dans ce cas

$$4p^3 + 27q^2 > 0$$

(3) admet une solution réelle X_1 qui donne $X_1 = \frac{r}{X'_1}$

Il est donc clair que l'analyse de ce problème est possible à l'aide de la méthode appliquée maintes fois par al-Khayyām. Il est étonnant qu'il ait fait passer l'hyperbole par le point E et non pas par le point B.

(2)– Dans le texte anonyme qui suit celui d'al-Khayyām, c'est précisément cette méthode qui permet à son auteur de déterminer l'hyperbole (H) passant par B et coupant le cercle (C) au point G cherché.

Analyse II: (figure D-3)

Supposons qu'on ait construit le point G vérifiant:

$$\frac{AE}{GH} = \frac{EH}{HB}$$

Soit GI la tangente au cercle (d'après III-16 des *Eléments*) ; EB coupe GI en I.

Donc G est connu. Donc la recherche de G se ramène à celle de la position de IK.

Mais la recherche de L ou de la position de IK n'est pas facile.

Remarque:

(1)- Al-Khayyām entend par ce qui précède que cette analyse n'aboutit pas à une figure dont on connaît la construction. Pourtant, l'examen de cette première analyse montre qu'al-Khayyām aurait pu aboutir à la solution de son problème s'il avait fait le choix d'une autre hyperbole. Il pouvait procéder ainsi : (voir figure p. 172)

Il s'agit de trouver un point G sur l'arc AB tel que :

$$\frac{AE}{GH} = \frac{EH}{HB} \qquad (1)$$

Traçons CZ la tangente au cercle en C et $GL \perp CZ$, $BM \perp CZ$. Soit (H) l'hyperbole passant par B et admettant CA et CZ pour asymptotes.

D'après (1) on a :

$$\frac{GH}{AE} = \frac{BH}{EH} \text{ d'où } \frac{GH + AE}{AE} = \frac{BH + EH}{EH}$$

Mais $$GH + AE = GL \text{ et } AE = CE$$

d'où $$\frac{GL}{CE} = \frac{EB}{EH}$$

d'où $$GL.EH = CE.EB$$

par conséquent $G \in (H)$. G est donc le deuxième point d'intersection de l'hyperbole et du cercle.

Dans un autre langage : Soit (EA, EB) un système d'axes (OX, OY), soit r le rayon du cercle, et G de coordonnées (X, Y) :

Alors (1) s'écrit

$$\frac{r}{X} = \frac{Y}{r-Y}$$

d'où $$Y = \frac{r^2}{X+r} \qquad (2)$$

Traité d'Abū al-Fatḥ ᶜUmar b. Ibrāhīm al-Khayyāmī

Problème: (figure D-1)

Diviser un quart de cercle AB en deux parties en un point G tel que:

$$\frac{AE}{GH} = \frac{EH}{HB} \qquad (1)$$

Analyse 1: (figure D-2)

Soit le cercle ($ABCD$) et G vérifiant (1). Construisons la figure 2, où $AC \perp BD$, $KI \perp AC$ et $IM \perp BD$, avec KI passant par G et $BM = AE$. Complétons le rectangle (IL).

On a: $$\frac{BM}{GH} = \frac{EH}{HB} \Rightarrow BM.HB = GH.EH$$

d'aprés VI– 16 des *Eléments*.

On en déduit:

$$BM.HB + HB.HG = GH.EH + HB.HG$$
$$\Rightarrow MI.HB = GH.EB$$
$$\Rightarrow LG.ML = EK.EB. \qquad (2)$$

Soit (H) l'hyperbole passant par E et admettant IK et IM pour asymptotes.

$L \in (H)$, d'après (2); (selon I– 55 et II– 4, 5 des *Coniques*)

Si donc L est connu, G le sera également. Donc chercher G c'est chercher L.

Si L est connu, alors LM est connu car la position de MB est connue puisqu'il est la tangente au cercle au point B; donc G est connu. Si la position de IK est connue, IK et MI (qui est connu) sont des asymptotes de (H) qui passe par le point connu; donc (H) est connue et tout point de (H) est alors connu. En effet comme:

$$E(X_0, Y_0) \in (H),$$

alors $$(L(X,Y) \in (H)) \Leftrightarrow (XY = X_0Y_0)$$

d'où $$(41)^3.\,\Delta = 1860867 - 2048000 < 0.$$

Il existe donc trois racines réelles. Pour exhiber les deux racines positives al-Khayyām raisonne de la manière suivante:

Soit D (41,41) et L (41,40 — ε); L $\in$ (P) Il en résulte que $CD > CL$ et D est au dessus de L.

Soit $K(\alpha,0)$ avec $\alpha = a - \frac{AC}{4}$; et $M(\alpha, Y_1) \in (P)$. Alors $Y_1 = 20 - \varepsilon'$;

$0 < \varepsilon' < 1$.

Soit $N(\alpha, Y_2) \in (H)$. Alors $Y_2 > 20$. Donc $KN > KM$; et par conséquent N est au dessus de M.

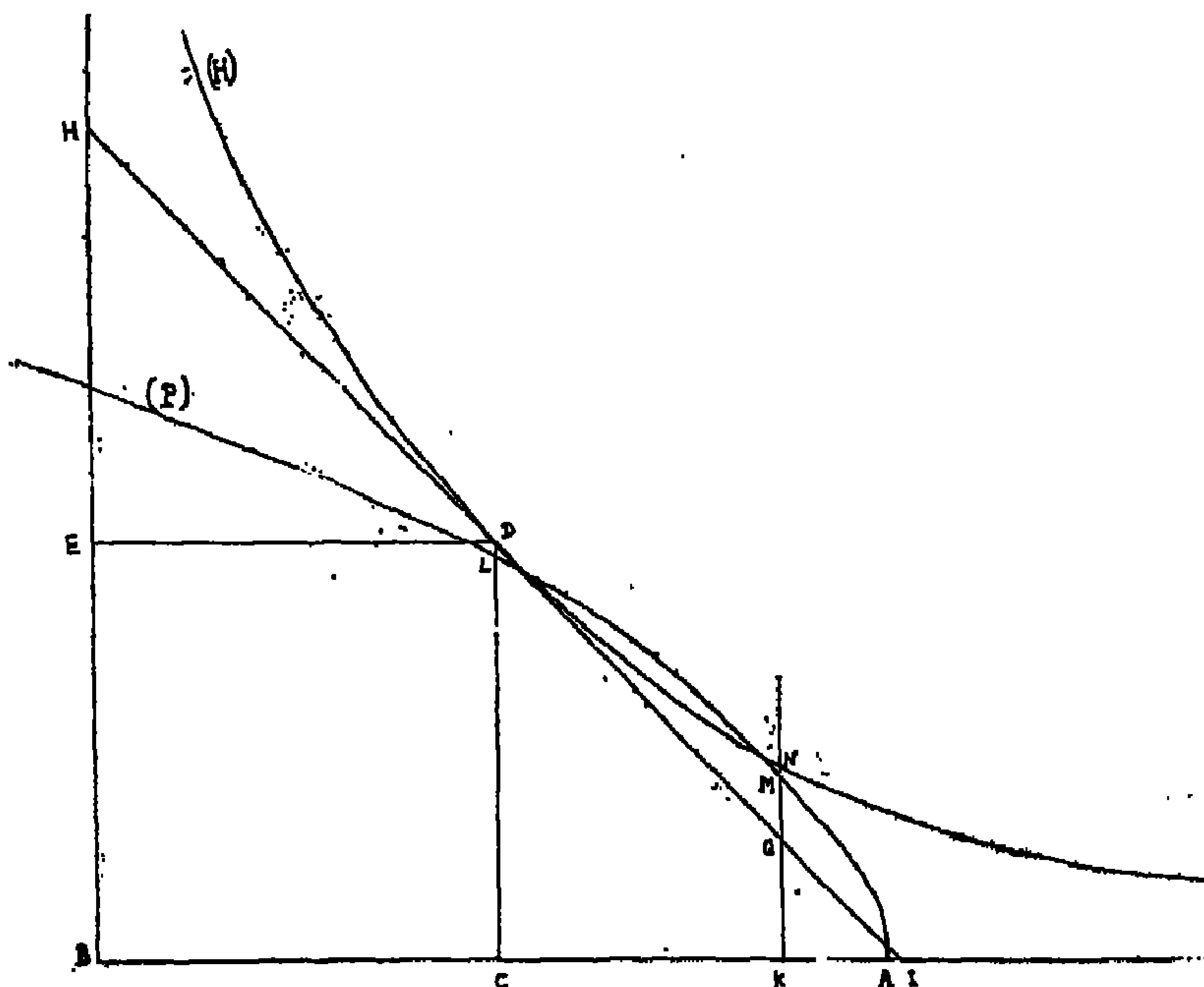
Prenons maintenant $K'(\beta,0)$ avec $\beta = a - \frac{2}{3}AC$.

Soit $M'(\beta, 32{,}6) \in (P)$.

Soit $N'(\beta, Y_3) \in (H)$; alors $Y_3 < 32$.

Donc $N'K' < M'K'$ et par conséquent N' est au dessous de M'.

Donc $N' \in (H)$ en étant intérieur à (P). Donc (H) et (P) se coupent nécessairement en deux points.



Alors $$\frac{Y^2_1}{Y^2_2} = \frac{a-c^{1/3}}{a-\alpha} = 4$$

donc $$Y_2 = \frac{Y_1}{2} = 20 - \frac{\varepsilon}{2}$$

Soit G (α,11+3/4); G est sur HI.

Donc $$MG = KM - KG = Y_2 - (11+3/4) = 8 + \frac{1}{4} - \frac{\varepsilon}{2}$$

Soit $N(\alpha, Y) \in (H)$; alors:

$$\alpha \; Y = C^{2/3}$$

et $$Y = GN + GK$$

donc $$GN > GM.$$

Donc N est à l'extérieur de (P).

c) $c^{1/3} < a/2$ (Voir p. 128).

(2) Dans ce contre-exemple, la démarche d'al-Khayyām consiste, en fait, à trouver deux points de l'hyperbole dont l'un est extérieur à la parabole et l'autre lui est intérieur pour conclure à l'intersection des deux courbes nécessairement.

La fin du texte donne l'impression de demeurer quelque peu inachevée, et a introduit ainsi une certaine confusion chez les historiens. Une lecture plus attentive montre qu'al-Khayyām, après avoir exhibé un point $D \in (H)$ et extérieur à (P), et un autre point $N \in (H)$ et extérieur à (P), semble laisser entendre que si on répète l'opération on trouvera un point appartenant à (H) et cette fois intérieur à (P); ce qui entraîne que les deux sections se coupent nécessairement en deux points.

En effet, le second contre-exemple aboutit à l'équation:

$$X^3 - 80X^2 + (41)^3 = 0$$

Posons $X' = \frac{41}{X}$; l'équation se réécrit:

$$X'^3 - \frac{80}{41} . X' + 1 = 0$$

b) $c^{1/3} > a/2$

(H) et (P) peuvent avoir un ou deux points communs. En effet: Construisons (H) et (P) avec:

$$a = 10; c = X_0^2 (a - X_0), \text{ avec } X_0 = 6.$$

Alors $c^{1/3} > a/2$.

On a $$\frac{X_0^2}{c^{2/3}} = \frac{c^{1/3}}{(a - X_0)}$$

Soit $H(X_0, Y) \in (H)$; donc $X_0 Y = c^{2/3}$

d'où $$\frac{X_0}{c^{1/3}} = \frac{c^{1/3}}{Y}$$

donc $$\frac{X_0^2}{c^{2/3}} = \frac{X_0}{Y}$$

d'où $$\frac{c^{1/3}}{a - X_0} = \frac{X_0}{Y}$$

donc $$\frac{X_0}{c^{1/3}} = \frac{Y}{a - X_0}$$

donc $$\frac{X_0}{c^{1/3}} = \frac{c^{1/3}}{Y} = \frac{Y}{a - X_0}$$

d'où $$Y^2 = c^{1/3}(a - X_0).$$

Donc $H(X_0, Y) \in (P)$. Donc (H) et (P) se coupent nécessairement.

Puis al-Khayyām donne un second contre-exemple: Construisons (H) et (P) avec:

$$a = 80 \;;\; c = (41)^3.$$

On a donc: $c^{1/3} > a/2$.

Alors $D(c^{1/3}, c^{1/3})$ est extérieur à (P). En effet:

Soit $L(c^{1/3}, Y_1) \in (P)$. Alors:

$$Y_1 = [c^{1/3}(a - c^{1/3})]^{1/2} = 40 - \varepsilon,$$

Soit $I(2c^{1/3}, 0)$ et $H(0, 2c^{1/3})$. Alors IH est tangent à (H) en D.

Soit $K(\alpha, 0)$, avec $\alpha = a - \frac{(a - c^{1/3})}{4}$; et $M(\alpha, Y_2) \in (P)$.

donc $$KI = 11 + \frac{3}{4}$$

mais $$\frac{KG}{KI} = \frac{HB}{BI} = 1$$

donc $$GM > 8$$

car $$GM = KM - KG$$

et GM est au dessus de la tangente à (H). Donc il est nécessairement à l'intérieur de (H). En effet, soit N l'intersection de (H) avec le prolongement de KM:

$$(KN.KB = BC^2 = 41^2) \Rightarrow KN > 23$$
$$\Rightarrow GN = KN - KG > 11 + \frac{1}{4}$$
$$\Rightarrow GN > GM$$

Remarques

(1) La démarche d'al-Khayyām est la suivante:

Soit l'équation

$$X^3 + c = aX^2$$

Al-Khayyām considère alors trois cas:

$$c^{1/3} = a/2 \; ; \quad c^{1/3} > a/2 \; ; \quad c^{1/3} < a/2.$$

a) $c^{1/3} = a/2$

On construit:

$$(H) = \{ (X,Y) \; ; XY = c^{2/3} \}$$

et $$(P) = \{ (X,Y) \; ; Y^2 = c^{1/3}(a - X) \}$$

Alors $D\,(a/2, a/2) \in (P)$.

De plus (H) et (P) ne sont pas tangentes en $D\,(a/2,a/2)$ mais s'y coupent ainsi qu'en un autre point. En effet:

Soit $G\,(0,a)$. Donc $D \in AG$, $AG \perp BD$ et $\measuredangle ABD = \measuredangle GBD$. Donc AD est tangent à (H) en D. Donc (P) ne peut pas être tangent à (H) en D, sinon, on pourrait mener de D une sécante intérieure à (P) et située entre (H) et sa tangente AD, ce qui est impossible.

Donc (P) coupe (H) en D, donc nécessairement en un autre point car, (P) est concave et (H) est convexe.

Soit $AB = 80$ et $BC = 41$. Donc $BC > AC$. (voir figure p. 170)

D est alors extérieur à (P). En effet:

Si $DC \perp AB$, et DC coupant (P) en L, on a

$$\overline{DC}^2 = \overline{BC}^2$$

avec $\overline{BC}^2 > BC.AC$ car $BC > AC$ dans ce cas:

mais $$BC.AC = \overline{LC}^2 \qquad (2)$$

car BC est le paramètre de (P).

Donc $$DC > LC$$

donc D est extérieur à (P).

On a alors: $$LC = \sqrt{1599} = 40-\varepsilon$$

d'après (2).

Soit I sur le prolongement de AB tel que:

$$IC = BC$$

et H sur le prolongement de BE tel que:

$$BH = BI.$$

Joignons IH. Alors IH est tangent à (H) en D, comme on l'a montré. Soit K sur AC tel que:

$$AK = \frac{AC}{4}$$

Soit $MK \perp AC$, coupant (P) en M. Alors:

$$\frac{\overline{LC}^2}{\overline{KM}^2} = \frac{AC}{AK}$$

car LC et KM sont des segments ordonnés de (P) d'après la proposition 19 du livre I des *Coniques* d'Apollonius.

Donc $$KM = \frac{LC}{2} = 20-\varepsilon'$$

or $$CI = 41$$

et $$AK = 9 + \frac{3}{4}$$

et $$AI = 2$$

Soit c tel que $\overline{GB}^2 . GA = c = \overline{BC}^3$ (1)

donc $BC > 5$ car $5^3 = 125$

D'autre part, d'après (1) on a:

$$\frac{\overline{GB}^2}{\overline{BC}^2} = \frac{BC}{GA}$$

Soit $HG \perp AB$ et HG coupant (H) en H. On complète (HB). Alors:

$(HB) = (CE)$ (équation de l'hyperbole.)

Leurs côtés sont donc proportionnels; d'où:

$$\frac{GB}{BC} = \frac{BC}{GH}$$

donc $$\frac{\overline{GB}^2}{\overline{BC}^2} = \frac{GB}{GH}$$

Mais on avait: $$\frac{\overline{GB}^2}{\overline{BC}^2} = \frac{BC}{GA}$$

d'où $$\frac{GB}{GH} = \frac{BC}{GA}$$

et par permutation, on a :

$$\frac{GB}{BC} = \frac{GH}{GA}$$

donc GB, BC, GH, GA sont en proportion continue:

$$\frac{GB}{BC} = \frac{BC}{GH} = \frac{GH}{GA}$$

Donc $\overline{GH}^2 = BC.GA.$

Mais BC est le côté droit de (P) qui admet AB pour axe et A pour sommet.

Donc GH est un segment ordonné de (P). Donc H est sur (P) nécessairement. Mais H était sur (H). Donc (H) et (P) se coupent nécessairement. Donc l'affirmation d'Abū al-Jūd selon laquelle (H) et (P) ne se coupaient pas était fausse.

Pour que cela soit plus évident, al-Khayyām considère un autre exemple:

et par conséquent D est sur l'hypoténuse AG du triangle ABG.

D'autre part AG traverse (P) (al-Khayyām utilise ici la concavité de la parabole).

On a aussi

$$\measuredangle ADB = 90^o \text{ et } \measuredangle ABD = \measuredangle GBD$$

et on sait que l'axe de (H) est bissectrice de l'angle ABE. BDI est donc nécessairement l'axe de (H) qui passe par D; et AD est parallèle aux segments ordonnés de (H). Donc AD est tangent à (H).

Il faut donc que (P) coupe (H) tout en ne passant pas entre (H) et sa tangente. En effet si (P) était tangente à (H), alors les segments menés de D à un point quelconque donné sur (AD) seraient situés entre (H) et sa tangente, ce qui est impossible (Voir E-17).

Donc (P) coupera nécessairement (H) en un autre point entre A et D.

b) $BC > AC$ (figure A-2)

D'après al-Khayyām, Abū al-Jūd a affirmé ensuite:

Si $BC > AC$ le problème est impossible car les deux coniques ne se rencontrent pas.

Mais al-Khayyām a déjà démontré dans E-17 que cette assertion était fausse. Ici, bien qu'il parle d'une démonstration plus générale, il ne donne en fait qu'un contre-exemple pour infirmer complètement l'assertion d'Abū al-Jūd.

Voici sa démonstration: (figure A-3)

Soit $$AB = a.$$

Soit BC tel que $\overline{BC}^3 = c$ avec $BC > \frac{AB}{2}$

BC est constructible à l'aide du lemme de E-3.

On complète (CE). On construit (H) et (P) comme indiqué. Prenons par exemple:

$$AB = 10; GB = 6.$$

Alors $$\overline{GB}^2 . GA = 144.$$

On a donc 86 équations résolubles par les méthodes exposées dans le Traité.

Al-Khayyām rappelle que ses prédécesseurs n'ont traité que l'ensemble des six équations. Il s'agit des six équations du second degré.

Commentaire d'al-Khayyām sur l'erreur commise par Abū al-Jūd dans la discussion de l'équation E-17:

$$X^3 + c = aX^2.$$

Aprés avoir achevé son traité, al-Khayyām revient sur l'erreur d'Abū al-Jūd pour la traiter d'une manière exhaustive. Il cite d'abord Abū al-Jūd :

Soit AB, un segment tel que:

$$AB = a$$

et C un point sur AB tel que:

$$\overline{BC}^3 = c.$$

Alors on a trois cas:

a) $BC = CA$, b) $BC > CA$, c) $BC < CA$.

a) $BC = CA$ (figure A-1)

On complète le carré (CE). On construit l'hyperbole (H) passant par le point D et d'asymtotes AB et BE.

On construit la parabole (P) de sommet A, d'axe AB et de côté droit BC.

Alors (P) passe nécessairement par D car:

$$(BC = CA = DC) \Rightarrow \overline{DC}^2 = BC.AC.$$

D'après al-Khayyām, Abū al-Jūd a affirmé que (H) et (P) étaient tangentes au point D. Al-Khayyām montre alors que Abū al-Jūd s'est trompé car les deux sections se coupent nécessairement. Voici sa preuve:

Soit G sur le prolongement de BE et tel que:

$$BG = BA.$$

Joignons AG. Alors AG passe nécessairement par D car:

$$DG = DB \doteq DA$$

$$X^2 + 2X = 2 + 2.\frac{1}{X^2}$$

(or cette équation a une racine positive) .

VI– Al-Khayyām donne finalement la classification suivante pour les équations de degré $\leqslant 3$ à une inconnue ou à une partie de l'inconnue:

1– *Equations binômes*:

On a 21 équations:

1-1. $X = c; X^2 = c; X^3 = c; X^2 = bX; X^3 = bX ; X^3 = aX^2$

1-2. $\frac{1}{X^3} = c.\frac{1}{X^2} ; \frac{1}{X^2} = c.\frac{1}{X} ; \frac{1}{X} = c$

$\frac{1}{X^3} = a.\frac{1}{X} ; \frac{1}{X^2} = a ; \frac{1}{X} = aX$

$\frac{1}{X^3} = a ; \frac{1}{X^2} = aX ; \frac{1}{X} = aX^2$

$\frac{1}{X^3} = aX ; \frac{1}{X^2} = aX^2 ; \frac{1}{X} = aX^3 ; \frac{1}{X^3} = aX^3$

Ces 19 équations peuvent être résolues par les méthodes déjà exposées.

Les deux équations restantes sont résolubles à l'aide de la proposition auxiliaire d'Ibn-al Haytham; il s'agit de:

1-3. $X^3 = a.\frac{1}{X^2} ; X^2 = a.\frac{1}{X^3}$

2– *Equations trinômes du second degré*:

Elles sont au nombre de 15. Elles sont résolubles à l'aide des propriétés du cercle.

3– *Equations trinômes du troisième degré*:

Elles sont au nombre de 24. Elles sont résolubles à l'aide des coniques.

4– *Equations quadrinômes du troisième degré*:

Elles sont au nombre de 28. Elles sont également résolubles à l'aide des coniques.

Plus généralement, une équation de la forme:

$$X^p X^q = a \quad \text{avec}\ p + q = 4; \quad 1 \leqslant p, \quad q \leqslant 3$$

(pour $p = q = 2$, on retrouve l'équation homogène)
aboutit à :

$$X = (a^{1/2})^{1/2}.$$

III– *Equations trinômes*:

$$(X = 1 + 2.\frac{1}{X}) \Leftrightarrow (X^2 = X + 2)$$

car
$$\frac{X}{X^2} = \frac{1}{X} = (2.\frac{1}{X})/2.$$

On détermine X par la méthode déjà donnée. On a:

$$X^2 = 4; X = 2 .$$

IV– *Equations quadrinômes*:

(a) $$(X^2 + 2X = 1 + 2.\frac{1}{X}) \Leftrightarrow (X^3 + 2X^2 = X + 2)$$

On détermine X par la méthode précédemment exposée.

(b) $$(X + 2 + 10.\frac{1}{X} = 20.\frac{1}{X^2}) \Leftrightarrow (X^3 + 2X^2 + 10X = 20)$$

X sera déterminé par la méthode donnée dans le traité.

Plus généralement, toute équation constituée d'éléments de l'ensemble:

$$X^p, X^{p-1}, X^{p-2}, X^{p-3}; \ 0 \leqslant p \leqslant 3$$

est équivalente à l'une des 25 équations déjà résolues.

V– Il n'existe aucune méthode connue, affirme al-Khayyām, pour résoudre une équation qui contient cinq des sept positions, c'est-à-dire une équation constituée d'éléments de l'ensemble:

$$X^p, X^{p-1}, X^{p-2}, X^{p-3}, X^{p-4}; \text{avec}\ 0 \leqslant p \leqslant 4$$

et a fortiori le cas le plus général.

Ainsi, il n'existe aucune méthode connue pour résoudre l'équation:

on a $X^2.X^2 = 16$

d'où $X^2 = 4.$

L'équation équivaut à: $X^4 = 16.$

(c) $(X = 4.\frac{1}{X}) \Leftrightarrow (X^2 = 4)$

II–2 *Equations non-homogènes:*

(a) $X^2 = a.\frac{1}{X^3}$

On ne peut pas résoudre ce problème par les méthodes déjà utilisées dans ce traité. Il dépend en effet de l'emploi de six proportions continues. Cette méthode a été utilisée par Ibn al-Haytham. Il s'agit de trouver quatre grandeurs X, Y, Z, U telles que, a et b étant donnés, on ait:

$$\frac{a}{X} = \frac{X}{Y} = \frac{Y}{Z} = \frac{Z}{U} = \frac{U}{b}$$

Alors: $\frac{a^5}{X^5} = \frac{a}{b}$

Si on choisit $a = 1$, le problème se ramène à:

$$X^5 = b$$

(b) $X^3 = a.\frac{1}{X^2}$

La solution s'obtient comme dans (a). L'idée d'al-Khayyām consiste en ceci:

Une équation de la forme:

$$X^p X^q = a \quad \text{avec } p + q = 5; \quad 2 \leqslant p, \quad q \leqslant 3$$

se résoud par la méthode de (a).

(c) $X^3 = a.\frac{1}{X}$

Exemple: $X^3 = 16.\frac{1}{X}$

On a $X^3X = 16$

d'où $X = (16^{1/2})^{1/2}.$

Dans cette équation quadrinôme du 3° degré, comme il évoque explicitement la méthode des coniques, il est obligé de revenir sur cette interprétation géométrique car, si au cas précédent "la partie homonyme" peut être parfaitement traduite par l'inverse du nombre on ne peut plus, quand la solution est un segment, parler de l'inverse au sens précédent. C'est pourquoi, il donne ici une méthode pour construire X tel que:

$$\frac{Z}{u} = \frac{u}{X}$$

u étant l'unité choisie; il définit ainsi X comme une sorte d'inverse de Z à un choix près de l'unité.

Cette méthode revient, étant donné un carré de côté u, l'unité, à construire un rectangle, de côté Z donné, égal au carré donné. Ce rectangle est bien constructible.

Il y a également 25 équations équivalentes aux équations précédemment traitées mais dont l'inconnue est $\frac{1}{X}$

II– *Etude des équations binômes des trois premiers degrés*

II–1 *Equations homogènes*

(a) $$X^3 = 10.\frac{1}{X^3} \qquad (1)$$

On a $$\left(10.\frac{1}{X^3}\right).X^3 = 10$$

d'où $$X^3 = \sqrt{10}$$

et on trouve X par la méthode exposée précédemment.

En effet al-Khayyām remarque:

$$X.\frac{1}{X} = 1 \text{ et plus généralement } X^n\left(a.\frac{1}{X^n}\right) = a \; ; n \in N$$

donc (1) devient:

$$Z^2 = 10 \qquad \text{avec } Z = X^3$$

d'où $$X^3 = \sqrt{10}$$

(b) $$X^2 = 16.\frac{1}{X^2}$$

pour 3, mais pour $n \in N$. Mais comme il n'a pas de méthode pour résoudre des équations de degré > 3, il s'arrête aux précédents termes.

I- *Equivalence entre une équation à une partie de l'inconnue et une équation à une inconnue.*

1- *Equation binôme*:

$$\left(\frac{1}{X^2} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{X}\right) \Leftrightarrow \left(Z^2 = \frac{1}{2} \cdot Z\right)$$

d'où $Z^2 = \frac{1}{4} = \frac{1}{2^2}$

d'où $X^2 = 4$

d'où $\frac{1}{X^2} = \frac{1}{4}$; $\frac{1}{X} = \frac{1}{2}$

2- *Equation trinôme*:

$$\left(\frac{1}{X^2} + 2.\frac{1}{X} = 1 + \frac{1}{4}\right) \Leftrightarrow \left(Z^2 + 2Z = 1 + \frac{1}{4}\right)$$

d'où $Z = \frac{1}{2}$; $Z^2 = \frac{1}{4}$

d'où $\frac{1}{X^2} = \frac{1}{4}$; $X^2 = 4$.

3- *Equation quadrinôme*:

$$\left(\frac{1}{X^3} + 3.\frac{1}{X^2} + 5.\frac{1}{X} = 3 + \frac{3}{8}\right) \Rightarrow \left(Z^3 + 3Z^2 + 5Z = 3 + \frac{3}{8}\right)$$

Soit Z la solution obtenue par l'intersection de deux coniques selon la méthode précédente; on a:

$$\frac{Z}{1} = \frac{1}{X}$$

Remarque:

Notons que pour les équations binômes et les équations trinômes du second degré, al-Khayyām les ramène, par l'équivalence indiquée aux équations déjà étudiées dans son traité; mais il ne revient pas à l'interprétation géométrique.

EQUATIONS QUI CONTIENNENT L'INVERSE DE L'INCONNUE

Pour achever l'étude systématique de la théorie des équations de degré 3, al-Khayyām examine les cas où les termes de l'équation ne contiennent pas seulement les puissances de X — jusqu'à l'ordre 3 – mais aussi leurs inverses. Connaissant parfaitement la généralité de certaines règles du calcul sur les puissances, dont certaines d'ailleurs se trouvent déjà dans Diophante, al-Khayyām se limite délibérément à la suite:

$$\frac{1}{X^3}, \frac{1}{X^2}, \frac{1}{X}, 1, X, X^2, X^3 \qquad (1)$$

qu'il nomme les sept positions.

Il commence par donner les définitions suivantes:

– On appelle partie de X la quantité Z telle que:

$$\frac{Z}{1} = \frac{1}{X}$$

Exemples:

si $X = 3 \Rightarrow Z = \frac{1}{3}$

si $X = \frac{1}{3} \Rightarrow Z = 3$

si $X = 4 \Rightarrow Z = \frac{1}{4}$

si $X = \frac{1}{4} \Rightarrow Z = 4$

– On appelle partie de X^2 la quantité Z^2 telle que:

$$\frac{Z^2}{1} = \frac{1}{X^2}$$

Cette définition est étendue à X^3.

Il énonce ensuite:

$$\frac{1/X^3}{1/X^2} = \frac{1/X^2}{1/X} = \frac{1/X}{1} = \frac{1}{X} = \frac{X}{X^2} = \frac{X^2}{X^3}$$

Donc les sept positions de (1) sont en proportion continue.

Al-Khayyām rappelle que la propriété est vraie non seulement

1° *cas*: $(c/b) < a$

Soit (DO,DB) un système d'axes (OX,OY).

Soit $(H_1) = \{ (X,Y) ; XY = b^{1/2}. (c/b) \}$

et $(H_2) = \{ (X,Y) ; (b^{1/2} - Y)^2 = (X - a)(X - c/b) \}$

Soit $M(X_0,Y_0) \in (H_1) \cap (H_2)$

$$M \in (H_1) \Rightarrow X_0 Y_0 = b^{1/2}. (c/b)$$
$$\Rightarrow X_0 (b^{1/2} - Y_0) = b^{1/2} (X_0 - c/b)$$
$$\Rightarrow \frac{(b^{1/2} - Y_0)}{(X_0 - c/b)} = \frac{b^{1/2}}{X_0}$$
$$\Rightarrow \frac{(b^{1/2} - Y_0)^2}{(X_0 - c/b)^2} = \frac{b}{X^2_0}$$
$$M \in (H_2) \Rightarrow (b^{1/2} - Y_0)^2 = (X_0 - a)(X_0 - c/b)$$
$$\Rightarrow \frac{(b^{1/2} - Y_0)^2}{(X_0 - c/b)^2} = \frac{(X_0 - a)}{(X_0 - c/b)}$$
$$\Rightarrow \frac{b}{X^2_0} = \frac{(X_0 - a)}{(X_0 - c/b)}$$
$$\Rightarrow bX_0 - c = X^3_0 - aX^2_0$$
$$\Rightarrow aX^2_0 + bX_0 = X^3_0 + c.$$

Donc X_0 est solution.

2° *cas*: $(c/b) = a$

Alors $X = a$ est solution car:

$$a^3 + c = a.a^2 + ba .$$

3° *cas*: $(c/b) > a$

Les mêmes équations donnent la même courbe (H_1) et une courbe (H_2) passant cette fois par le point A $(c/b, b^{1/2})$ — voir figure 25-2–. Donc si les deux courbes se coupent en deux points ou sont tangentes, le même raisonnement montre que ces points correspondent à des solutions.

(2) Dans le 1° cas, la seconde solution positive n'est pas donnée par al-Khayyām. La raison, semble-t-il, est que cette solution s'obtient par l'intersection de (H_1) avec la seconde branche de l'hyperbole (H_2) Or, par hyperbole, al-Khayyām désigne la première branche.

d'où $$\frac{\overline{ME}^2}{\overline{EA}^2} = \frac{\overline{BD}^2}{\overline{BE}^2}$$

mais $$\frac{\overline{ME}^2}{\overline{EA}^2} = \frac{CE}{EA}$$

car $M \in (KCL) \implies \overline{ME}^2 = CE.EA$

donc $$\overline{BD}^2.EA = \overline{BE}^2.CE$$

d'où $$\overline{BE}^2.BC + \overline{BD}^2.EA = \overline{BE}^3$$

alors $$BC.\overline{BE}^2 + \overline{BD}^2.BA + \overline{BD}^2.EA = a.\overline{BE}^2 + b.BE = \overline{BE}^3 + c.$$

donc BE est solution.

2° *cas*: $S = BC$

Alors BE est solution:

$$\overline{BC}^3 = BC.\overline{BC}^2 = a.\overline{BC}^2$$

$$c = \overline{BD}^2.BC = b.BC$$

d'où $$\overline{BC}^3 + c = a.\overline{BC}^2 + b.BC.$$

On remarque également que BC est solution de l'équation:

$$X^3 + bX = aX^2 + c$$

car $$\overline{BC}^3 + b.BC = a.\overline{BC}^2 + c\,.$$

3° *cas*: $S > BC$ (figure E-25;2)

Soit $BA = S$. Complétons le rectangle (BG). Soient les deux hyperboles précédentes mais passant toutes les deux par A. Elles se coupent en A. Si elles se coupent en deux autres points par intersection ou en un autre point par tangence, comme on sait d'après le livre IV des *Coniques*, le problème est alors possible; sinon il est impossible. Si elles se coupent, les deux points d'intersection donnent deux solutions; et la démonstration est identique à celle du premier cas.

Remarques:

(1) Pour résoudre $X^3 + c = aX^2 + bX$

al-Khayyām considère les trois cas suivants:

Soit $(C) = \{ (X,Y) ; (Y - b^{1/2})^2 = (X - a)((c/b) - X) \}$
et (H) l'hyperbole du 1° cas.

Alors (H) et (C) se coupent nécessairement. En effet:

$$K(X_0,Y_0) \in (H) \Rightarrow X_0\,Y_0 = b^{1/2}.(c/b)$$
$$\Rightarrow (Y_0 - b^{1/2})\,X_0 = ((c/b) - X_0)\,b^{1/2}$$

et la suite est identique à la démonstration du premier cas.

E-25 $$X^3 + c = aX^2 + bX$$

Soit $BC = a$, $BD = |b|^{1/2}.l$, $BD \perp BC$.

Soit S un segment tel que :

$$\overline{BD}^2 .S = c.$$

S est constructible à l'aide du lemme de E-13.

On a trois cas:

$$S < BC, S = BC, S > BC.$$

1° *cas*: $S < BC$ (figure E-25;1)

Soit $BA = S$. Complétons le rectangle (BG).

Soit (HAI) l'hyperbole passant par A et admettant BD, DG pour asymptotes.

Soit(KCL) l'hyperbole de sommet C, d'axe BC et de côtés droit et transverse égaux à AC.

Les deux courbes se coupent nécessairement en un point M qui sera de position connue car les courbes le sont.

Soit $MN \perp DB$, $EMO \perp AB$. MN et EMO sont de position et de grandeur connues.

Donc $(DA) = (DM)$ (équation de (HAI)).

On en déduit comme précédemment:

$$(NE) = (GE)$$

car
$$(NE) = (DA) - (NG) + (AM)$$
$$(GE) = (DM) - (NG) + (AM)$$

d'où
$$\frac{ME}{\overline{EA}} = \frac{BD}{\overline{BE}}$$

$$\Rightarrow X_0 Y_0 - (c/b) Y_0 = b^{1/2}.(c/b) - (c/b) Y_0$$
$$\Rightarrow Y_0 (X_0 - c/b) = (b^{1/2} - Y_0)\ (c/b)$$
$$\Rightarrow Y_0 (X_0 - c/b) + (b^{1/2} - Y_0)\ (X_0 - c/b)$$
$$= (b^{1/2} - Y_0)\ (c/b) + (b^{1/2} - Y_0)\ (X_0 - c/b)$$
$$\Rightarrow b^{1/2} (X_0 - c/b) = (b^{1/2} - Y_0) X_0$$
$$\Rightarrow \frac{(b^{1/2} - Y_0)}{(X_0 - c/b)} = \frac{b^{1/2}}{X_0}$$
$$\Rightarrow \frac{(b^{1/2} - Y_0)^2}{(X_0 - c/b)^2} = \frac{b}{X^2_0}$$
$$K \in (C) \quad \Rightarrow (b^{1/2} - Y_0)^2 = (X_0 - c/b)\ (a - X_0)$$
$$\Rightarrow \frac{(b^{1/2} - Y_0)^2}{(X_0 - c/b)^2} = \frac{(a - X_0)}{(X_0 - c/b)}$$
$$\Rightarrow \frac{b}{X^2_0} = \frac{(a - X_0)}{(X_0 - c/b)}$$
$$\Rightarrow bX_0 - c = aX^2_0 - X^3_0$$
$$\Rightarrow X^3_0 + bX_0 = aX^2_0 + c$$

Donc X_0 est solution.

2° *cas*: $(c/b) = a$

Il est clair que si $c/b \to a$, avec $(c/b) < a$, (C) tend vers la courbe:

$$\Delta = \{\ (X,Y)\ ;\ b^{1/2} - Y = \pm\ (X - a)\ \}$$

qui passe par $A\ (a, b^{1/2})$ qui correspond à la solution.

En effet:

$$Y = (b^{1/2} + a) - X \quad \Rightarrow ((b^{1/2} + a) - X)X = ab^{1/2}$$
$$\Rightarrow X(b^{1/2} + a) - X^2 = ab^{1/2}$$
$$\Rightarrow X = a$$

Donc a est solution, car:

$$a^3 + ba = a.a^2 + c$$

a est également solution de l'équation:

$$X^3 + c = aX^2 + bX$$

3° *cas*: $(c/b) > a$

$$X^3 + c = aX^2 + bX$$

3° *cas*: $S > BC$ (figure E-24;2)

Soit $AB = S$ et (AKC) le demi-cercle de diamètre AC (figure 2).

Alors l'hyperbole qui passe par A coupe le demi-cercle en K, comme on l'a montré précédemment.

Soit $KE \perp AB$, $KM \perp BD$.

EB sera la solution cherchée. La preuve est identique à la précédente. On retranche (ED) et on aura:

$$\frac{EK}{EA} = \frac{AG}{EB} \text{ et } \frac{\overline{EK}^2}{\overline{EA}^2} = \frac{\overline{AG}^2}{\overline{EB}^2}$$

et la suite est identique.

Donc cette espèce possède plusieurs cas dont l'un relève aussi de E-25.

Remarques:

(1) La preuve d'al-Khayyām semble reposer sur l'idée qu'on ne peut mener deux tangentes distinctes à partir d'un point donné sur une courbe.

(2) Pour résoudre donc

$$X^3 + bX = aX^2 + c,$$

Al-Khayyām distingue les cas suivants:

1° *cas*: $(c/b) < a$

Soit (DG,DB) un système d'axes (OX,OY).

Soit $(C) = \{ (X,Y) ; (b^{1/2} - Y)^2 = (X - c/b)(a - X) \}$

et $(H) = \{ (X,Y) ; XY = b^{1/2}. (c/b) \}$

Par construction, $A(c/b, b^{1/2}) \in (H) \cap (C)$.

Mais (H) et (C) se coupent nécessairement en un autre point K (X_0, Y_0), sinon on pourrait mener une tangente à (H) au point A et qui ne couperait pas (C).

Ce qui est absurde. Donc:

$K \in (H) \Longrightarrow X_0 Y_0 = b^{1/2}. (c/b)$

Soit $KE \perp BC$ et $KM \perp BD$, KE et KM sont donc de position et de grandeur connues. Prolongeons KE jusqu'à L sur DG et complétons (KD). On a:

$$(AD) = (KD) \text{ (équation de l'hyperbole)}$$

d'où, en retranchant (MG) et en ajoutant (AK), on a:

$$(BK) = (AL)$$

donc $$\frac{EK}{EA} = \frac{EL}{EB}$$

donc $$\frac{\overline{EK}^2}{\overline{EA}^2} = \frac{\overline{EL}^2}{\overline{EB}^2}$$

mais $$\frac{\overline{EK}^2}{\overline{EA}^2} = \frac{EC}{EA}$$

car $$\overline{EK}^2 = EA.EC \text{ (K appartient au cercle)}$$

d'où $$\frac{\overline{BD}^2}{\overline{BE}^2} = \frac{EC}{EA}$$

d'où $$\overline{BD}^2.EA = \overline{BE}^2.EC$$

donc $$\overline{BE}^3 + \overline{BD}^2.EA = (EC + EB)\overline{EB}^2 = BC.\overline{EB}^2 = a.\overline{BE}^2$$

d'où $$\overline{BE}^3 + \overline{BD}^2(EA + AB) = a.\overline{BE}^2 + \overline{BD}^2.AB$$

$$\overline{BE}^3 + b.BE = a.\overline{BE}^2 + c.$$

Donc BE est solution.

2° *cas*: $S = BC$

BC sera la solution cherchée.

En effet: $$\overline{BC}^3 = BC.\overline{BC}^2 = a.\overline{BC}^2$$

et $$\overline{BD}^2.BC = b.BC = \overline{BD}^2.S = c$$

d'où $$\overline{BC}^3 + b.BC = a.\overline{BC}^2 + c.$$

BC est aussi solution d'une équation de type E-25, car:

$$\overline{BC}^3 + b.BC = \overline{BC}^3 + c = a.\overline{BC}^2 + b.BC$$

c'est-à-dire $X = BC$ vérifie:

avec $Y_o = X_o + a$

d'où $$X^2_o + (a - b^{1/2})\, X_o - c/b^{1/2} = 0$$

donc $$X_o = b^{1/2}.$$

3° *cas*: $(c/b) > a$

Soit (H_1) la même courbe que dans le premier cas, et (H_2) l'hyperbole de côtés droit et transverse égaux à $((c/b)-a)$ et passant par C $(a,0)$.

Comme (H_1) et (H_2) ont les mêmes équations que dans le premier cas, la preuve est la même que précédemment.

E-24 $$X^3 + bX = aX^2 + c$$

Soit $BC = a$, $BD = |b|^{1/2}.l$; $BD \perp BC$.

Soit S tel que:

$$\overline{BD}^2 . S = c.$$

S est constructible à l'aide du lemme de E-13.

On a trois cas:

$$S < BC,\ S = BC,\ S > BC.$$

1° *cas*: (figure E-24;1)

$$S < BC$$

Soit $BA = S$, (AD) le rectangle complété.

Soit (AKC) le demi-cercle de diamètre AC. (AKC) est de position connue.

Soit (HAI) l'hyperbole passant par A et admettant BD, DG pour asymptotes. (HAI) est donc de position connue. (HAI) coupe AG la tangente en A au cercle; donc elle coupe (AKC) en un autre point.

En effet, supposons que (HAI) est entre (AKC) et AG. Alors, d'après II-49 des *Coniques*, on peut mener une tangente à (HAI) au point A. Cette tangente serait ou bien entre (AKC) et AG, ce qui est absurde, ou bien au delà de AG et alors AG serait entre (HAI) et sa tangente, ce qui est également absurde.

Donc (HAI) coupe (AKC) en un autre point K, qui sera de position connue.

Soit $H(X_0, Y_0) \in (H_1) \cap (H_2)$, alors:

$$H \in (H_1) \Rightarrow (Y_0 - b^{1/2}) X_0 = b^{1/2}.(c/b)$$

$$\Rightarrow (Y_0 - b^{1/2}) X_0 + b^{1/2} X_0 = b^{1/2}.(c/b) + b^{1/2} X_0$$

$$\Rightarrow Y_0 X_0 = (X_0 + c/b) b^{1/2}$$

$$\Rightarrow \frac{Y_0}{(X_0 + c/b)} = \frac{b^{1/2}}{X_0}$$

$$\Rightarrow \frac{Y_0^2}{(X_0 + c/b)^2} = \frac{b}{X_0^2}$$

$$H \in (H_2) \quad \Rightarrow \frac{Y^2_0}{(X_0 + c/b)^2} = \frac{(X_0 + a)}{(X_0 + c/b)}$$

$$\Rightarrow \frac{b}{X^2_0} = \frac{(X_0 + a)}{(X_0 + c/b)}$$

$$\Rightarrow bX_0 + c = X^3_0 + aX^2_0$$

Donc X_0 est solution.

2° *cas*: $(c/b) = a$

Alors $X_0 = b^{1/2}$ est solution. En effet:

$$b^{3/2} + ab = b.b^{1/2} + ab$$

Dans ce cas, remarque al-Khayyām, $b^{1/2}$ est aussi solution de:

$$X^3 + c = aX^2 + bX.$$

Notons que ce cas est un cas limite du premier, lorsque

$$c/b \rightarrow a \text{ (avec } (c/b) < a).$$

(H_1) reste inchangée car son équation est indépendante de a. Mais (H_2) devient:

$$\{ (X,Y) \; ; \; Y^2 = (X + a)^2 \} = \{ (X,Y) \; ; \; Y = \pm (X + a). \}$$

(H_2) se transforme donc en deux droites d'équations:

$$Y = X + a \text{ et } Y = -X - a$$

qui sont les asymptotes de (H_2) du premier cas.

La droite, $Y = X+a$, coupe (H_1) en un point H (X_0, Y_0) tel que X_0 soit solution de l'équation. X_0 est obtenu ainsi:

$$(Y_0 - b^{1/2}) X_0 = b^{1/2}.(c/b)$$

$$\overline{BD}^3 + c = a.\overline{BD}^2 + b.BD.$$

On voit donc que, dans ce cas, BD est aussi solution de l'équation:

$$X^3 + c = aX^2 + bX$$

qui est du type E-25.

3°*cas*: (figure E-23;2)

$$S > BC$$

Soit C entre A et B tel que $AB = S$.

Construisons la deuxième hyperbole passant cette fois par C, au lieu de A, et ayant le côté droit et le côté transverse égaux à AC. Les deux hyperboles se coupent nécessairement; la solution est encore BK. La démonstration est analogue à la précédente, à cette exception que cette fois on a:

$$\frac{\overline{HK}^2}{\overline{KA}^2} = \frac{AK}{KG}$$

Cette espèce présente donc des cas différents dont l'un se ramène à l'équation qui sera traitée en dernier; il s'agit de:
$X^3 + c = aX^2 + bX$.

Remarques:

(1) Pour résoudre: $X^3 + aX^2 = bX + c$

Al-Khayyām considère trois cas:

$$(c/b) < a,\ (c/b) = a,\ (c/b) > a.$$

Cette distinction a pour origine la démarche géométrique délibérément adoptée par al-Khayyām. Une écriture algébrique ne distingue pas ces différents cas.

(2) Considérons alors ces cas:

1° *cas*: $(c/b) < a$

Soit (AB,BD) un système d'axes (OX,OY).

Soit: $(H_1) = \{ (X,Y) ; (Y - b^{1/2})\, X = b^{1/2}. (c/b) \}$

et $(H_2) = \{ (X,Y) ; Y^2 = (X + c/b)\,(X + a) \}$

(H_2) est donc l'hyperbole de sommet A $(-c/b,O)$ et de côtés droit et transverse $(a - c/b)$.

(AHI) coupe nécessairement (EH), en un point H. H est donc de position connue.

Soit HK et HL perpendiculaires à AB, BD respectivement. HK et HL sont de position connue, et on a:

$$(HD) = (ED) = (AD)$$

car $E \in (EH)$ et $H \in (EH)$, et par hypothèse: $(ED) = (AD)$.

d'où $$(HD) + (DK) = (AD) + (DK)$$

donc $$(HB) = (AM)$$

d'où $$\frac{BL}{KA} = \frac{KM}{HL}$$

donc $$\frac{\overline{BL}^2}{\overline{KA}^2} = \frac{\overline{KM}^2}{\overline{HL}^2}$$

mais $$\frac{\overline{HK}^2}{\overline{KA}^2} = \frac{CK}{AK}$$

car $H \in (AHI)$ $\Rightarrow \overline{BL}^2 = KA.CK$

donc $$\frac{\overline{BD}^2}{\overline{KB}^2} = \frac{CK}{AK}$$

d'où $$\overline{BD}^2 \cdot AK = \overline{KB}^2 \cdot CK$$

mais $$\overline{KB}^2 \cdot CK = \overline{KB}^3 + CB.\overline{KB}^2 = \overline{KB}^3 + a.\overline{KB}^2$$

d'autre part $$\overline{BD}^2 .AK = \overline{BD}^2 \cdot AB + \overline{BD}^2 \cdot KB = c + b.KB$$

donc $$\overline{KB}^3 + a.\overline{KB}^2 = c + b.KB$$

donc KB est solution.

2° *cas*:

$$S = BC$$

Alors BD est la solution cherchée.

En effet: $$\overline{BD}^3 = \overline{BD}^2 \cdot BD = b.BD$$

$$c = \overline{BD}^2 \cdot S = \overline{BD}^2 \cdot BC = a.\overline{BD}^2$$

donc $$\overline{BD}^3 + a.\overline{BD}^2 = c + b.BD$$

mais on a également:

$$\Rightarrow X_0 Y_0 = ((c/b) + X_0)\, b^{1/2}$$

$$\Rightarrow \frac{Y_0}{((c/b) + X_0)} = \frac{b^{1/2}}{X_0}$$

$$\Rightarrow \frac{Y^2_0}{((c/b) + X_0)^2} = \frac{b}{X^2_0}$$

$I \in (H_2)$ $\Rightarrow Y^2_0 = (X_0 + c/b)(X_0 - a)$

$$\Rightarrow \frac{Y^2_0}{(X_0 + c/b)^2} = \frac{(X_0 - a)}{(X_0 + c/b)}$$

$$\Rightarrow \frac{(X_0 - a)}{(X_0 + c/b)} = \frac{b}{X^2_0}$$

$$\Rightarrow bX_0 + c = X^3_0 - aX^2_0.$$

$$\Rightarrow X^3_0 = aX^2_0 + bX_0 + c.$$

Donc X_0 est solution.

(2) L'ébauche par al-Khayyām de la démonstration de l'existence du point d'intersection qui est apparue jusqu'à maintenant au seul problème E-19, n'apparaît pas ici. On peut donc déduire que cette preuve n'est pas un but fondamental pour le mathématicien.

E-23 $X^3 + aX^2 = bX + c$

Soit $BD = |b|^{1/2}.l$, $CB = a$, $CB \perp BD$.

Soit S tel que: $\overline{BD}^2 .S = c$.

S est constructible à l'aide du lemme de E-13.

On a trois cas:

1° *cas*: (figure E-23;1)

$$S < BC$$

Soit A entre B et C et tel que: $AB = S$. Complétons le rectangle (AD). Soit G quelconque dans le prolongement de BD. Soit $(ED) = (AD)$ construit sur DG. E est donc de position connue et EG et GD sont de grandeur et de position connues.

Soit (EH) l'hyperbole passant par E et admettant GD, DO pour asymptotes.

(EH) est de position connue. Soit (AHI) l'hyperbole de sommet A, d'axe AB, de côtés droit et transverse AC.

tion. I sera de position connue. Soit ID, IN perpendiculaires à BM et BC respectivement; on a:

$$(IE) = (EH) = (EA)$$

car I et H sont sur (HIK); et $HM.ME = BE.BA$ par hypothèse.

D'où $\qquad (IE) + (EN) = (EA) + (EN)$

d'où $\qquad (AS) = (IB)$

donc $\qquad \frac{IN}{AN} = \frac{BE}{BN}$

donc $\qquad \frac{\overline{IN}^2}{\overline{AN}^2} = \frac{\overline{BE}^2}{\overline{BN}^2}$

mais $\qquad \frac{\overline{IN}^2}{\overline{AN}^2} = \frac{NC}{AN}$

car $I \in (LCI) \qquad \Rightarrow IN^2 = NC.AN \Rightarrow \frac{\overline{IN}^2}{\overline{AN}^2} = \frac{NC}{AN}$

donc $\qquad \frac{\overline{BE}^2}{\overline{BN}^2} = \frac{NC}{AN}$

d'où $\qquad \overline{BE}^2 \cdot AN = \overline{BN}^2 \cdot NC$

mais $\qquad \overline{BE}^2 \cdot AN = \overline{BE}^2 \cdot AB + \overline{BE}^2 \cdot BN = c + b.BN$

d'où $\qquad c + b.BN + a.\ \overline{BN}^2 = \overline{BN}^2 \cdot NC + \overline{BN}^2 \cdot BC = \overline{BN}^3 \cdot$

Donc BN est solution.

Remarques:

(1) La démarche d'al-Khayyām est la suivante:

Soit (BA,BE) un système d'axes (OX,OY).

Soit $\qquad (H_1) = \{ (X,Y) \ ; (Y - b^{1/2}) X = b^{1/2}. (c/b) \}$

et $\qquad (H_2) = \{ (X,Y) \ ; Y^2 = (X + c/b)(X - a) \}$

Alors (H_1) et (H_2) se coupent nécessairement.

Soit $I (X_0,Y_0) \in (H_1) \cap (H_2)$.

$I \in (H_1) \qquad \Rightarrow (Y_0 - b^{1/2}) X_0 = b^{1/2}. (c/b)$

$\qquad \Rightarrow (Y_0 - b^{1/2}) X_0 + b^{1/2} X_0 = b^{1/2}.(c/b) + b^{1/2} X_0$

qui est l'équation de (H). Donc $N(X,Y) \in (H)$. Ce qui est absurde puisque (H) et (C) ne se coupent pas. D'où le résultat.

Méthode à suivre dans ce problème:

Quelle que soit la position de C par rapport à (C), on construit (H) comme indiqué.

Alors si (H) et (C) se coupent, il y a des solutions (une si elles sont tangentes, deux si elles se coupent en deux points). Sinon, il n'y a pas de solution.

(3) Al-Khayyām rappelle le problème qui était à l'origine de la résolution d'un problème de ce type par le mathématicien Abū al-Jūd: Il se ramène, étant donné $a > 0$, à chercher $X < a$ tel que:

$$(a-X)^2 + X^2 + \frac{(a-X)}{X} = 72, \text{ avec } a = 10$$

qui se ramène à:

$$X^3 + (13 + 1/2)\,X + 5 = 10X^2$$

qui admet deux solutions positives.

(4) On note qu'al-Khayyām, pour expliquer l'intersection de (H) et de (C), utilise *implicitement* la continuité du graphe de (H) et le fait que ce graphe a des branches infinies, alors que le graphe de (C) est une courbe compacte dans le plan.

E-22 $$X^3 = aX^2 + bX + c$$

Soit $BE = |b|^{1/2}.l$, et soit $AB \perp BE$ tel que: (figure E-22)

$$\overline{BE}^2.AB = c$$

$AB = c/b$ est constructible à l'aide du lemme de E-13. Soit $BC = a$, sur le prolongement de AB. On construit (AE). Soit M quelconque sur le prolongement de BE. On construit sur EM le rectangle (EH) $= (AE)$. Donc H sera de position connue.

Soit (HIK) l'hyperbole passant par H et admettant EM, ES pour asymptotes. (HIK) est de position connue.

Soit (LIC) une seconde hyperbole de sommet C, dont l'axe est sur le prolongement de BC et de côté droit et de côté transverse égaux à AC. Elle est également de position connue.

(LCI) coupe nécessairement (HIK). Soit I le point d'intersec-

2° *cas*:

$C(O, b^{1/2})$ est sur (C) ou à l'extérieur de (C), c'est-à-dire:

$$b^2 \geqslant ac.$$

Soit $H(\alpha, \beta)$ tel que:

$$\beta = (ac/b)^{1/2} \text{ et } \alpha(b^{1/2} - \beta) = b^{1/2}(c/b)$$

c'est-à-dire: $$\alpha = \frac{c}{(b - a^{1/2}.\ c^{1/2})}$$

On applique le raisonnement du premier cas.

(2) Al-Khayyām examine ici la relation entre l'existence de la solution et l'intersection des deux courbes.

Si (H) ne coupe pas (C), il n'y a pas de solution.

En effet:

Soit X la solution. Alors:

$$X < a$$

car si $X \geqslant a$, on aurait : $X^3 \geqslant aX^2$. Ce qui est impossible.

Soit alors $N(X,Y) \in (C)$ avec $X < a$. N existe car $X < a$. Alors $N \in (H)$ nécessairement.

En effet: X étant solution, on a:

$$X^3 + bX + c = aX^2 = (a - X)X^2 + X^3$$

$$\Rightarrow bX + c = (a - X)\ X^2$$

$$\Rightarrow b\ (X + c/b) = (a - X)X^2$$

$$\Rightarrow \frac{b}{X^2} = \frac{(a - X)}{(X + c/b)}$$

Mais $N(X,Y) \in (C)$. Donc:

$$\frac{Y^2}{(X + c/b)^2} = \frac{(a - X)}{(X + c/b)}$$

donc $$\frac{b}{X^2} = \frac{Y^2}{(X + c/b)^2}$$

donc $$XY = b^{1/2}(X + c/b)$$

donc $$X(Y - b^{1/2}) = \frac{c}{b^{1/2}}$$

(a) H est intérieur à (C), c'est-à-dire:

$$c^{3/2} + b^2.a^{1/2} < c^{1/2}.\,ab$$

Soit (H) l'hyperbole équilatère passant H (α, β):

$$(H) = \{ (X,Y) \,;\, X(Y - b^{1/2}) = c/b^{1/2} \}$$

Donc (H) coupe nécessairement (C) en deux points.

Soit $M(X_o, Y_o)$ un de ces points.

$$M \in (H) \Rightarrow X_o(Y_o - b^{1/2}) = \frac{c}{b^{1/2}}$$

$$\Rightarrow X_o(Y_o - b^{1/2}) + X_o\, b^{1/2} = c/b^{1/2} + X_o b^{1/2}$$

$$\Rightarrow X_oY_o = (c/b + X_o)\, b^{1/2}$$

$$\Rightarrow \frac{Y_o}{(c/b + X_o)} = \frac{b^{1/2}}{X_o}$$

$$\Rightarrow \frac{Y^2_o}{(c/b + X_o)^2} = \frac{b}{X^2_o}$$

$$M \in (C) \quad \Rightarrow \frac{Y^2_o}{(c/b + X_o)^2} = \frac{(a - X_o)}{(c/b + X_o)}$$

$$\Rightarrow \frac{b}{X^2_o} = \frac{a - X_o}{c/b + X_o}$$

$$\Rightarrow c + bX_o = aX^2_o - X^3_o$$

$$\Rightarrow X^3_o + bX_o + c = aX^2_o$$

X_o est donc solution.

(b) H est extérieur à (C), c'est-à-dire:

$$c^{3/2} + b^2.a^{1/2} > c^{1/2}.ab.$$

Soit (H) la même hyperbole passant par H.

Si (H) est tangente à (C), ou le coupe en deux points, on est ramené au cas précédent.

Si (H) ne rencontre pas (C), on fait varier continûment CG(c'est-à-dire b) en moins ou en plus; et à chaque valeur de b on associe un point H. Si, après toutes ces opérations, (H) ne coupe toujours pas (C), le problème est impossible.

c'est-à-dire: $(NC) = (CA) = (CH)$

donc N est sur l'hyperbole passant par H et admettant CG et CM pour asymptotes.

Méthode à suivre dans ce problème:

Soit BC avec C ayant une position quelconque par rapport au cercle (C).

On construit sur le prolongement de BC un rectangle de sommet C et égal à (AC).

Soit $CM \perp GC$. Soit (H) l'hyperbole passant par le sommet opposé à C et ayant GC et CM pour asymptotes. Si (H) rencontre (C) par tangence ou par intersection le problème est possible. Sinon, il, est impossible.

Al-Khayyām rappelle enfin le problème qui était à l'origine de la résolution par Abū al-Jūd d'une équation de ce type:

Partager une longueur, a, en deux parties X et $(a - X)$ telles que:

$$(a - X)^2 + X^2 + \frac{(a - X)}{X} = 72 \text{ (ici, } a = 10)$$

qui se ramène à:

$$X^3 + (13 + 1/2)X + 5 = 10X^2.$$

Dans cet exemple, rappelle al-Khayyām, les points C et H sont à l'intérieur de (C).

Remarques:

(1) Exposons d'abord la démarche d'al-Khayyām:

Soit (BA,BC) un système d'axes (OX,OY).

Soit:

$$(C) = \{ (X,Y) \; ; \; Y^2 = (X + c/b)(a - X) \}$$

1° *cas*:

$C(0,b^{1/2})$ est à l'intérieur de (C), c'est-à-dire: $b^2 < ac$.

Soit $H(\alpha,\beta)$ tel que:

$$\beta = (ac/b)^{1/2} \text{ et } \alpha(\beta - b^{1/2}) = b^{1/2}(c/b)$$

Alors on a les cas suivants:

met opposé à C soit un point par où passe une hyperbole qui coupe (C).

La démonstration est facile, affirme al-Khayyām.

III– On démontre les cas impossibles par inversion de la démonstration donnée pour les cas possibles.

En effet, pour que le problème soit possible, il faut que:

$$X < a = EB$$

car si $X = a$, alors:

$$X^3 = aX^2$$

ce qui est impossible, car:

$$X^3 + bX + c = aX^2$$

et si $X > a$, alors:

$$X^3 > aX^2$$

ce qui est impossible.

Soit alors $BP = X$. Soit $PN \perp BE$ et N sur (C). Alors N sera nécessairement sur (H), d'après la preuve précédente inversée, ce qui est absurde car (H) ne rencontre pas le cercle.

En fait, comme $BP = X$, on a:

$$\overline{BP}^3 + \overline{BC}^2 . BP + \overline{BC}^2 . AB = BE.\overline{BP}^2$$
$$= \overline{BP}^3 + PE.\overline{BP}^2$$

donc

$$\overline{BC}^2 . BP + \overline{BC}^2 . AB = PE.\overline{BP}^2$$

$$\Rightarrow AP.\overline{BC}^2 = PE.\overline{BP}^2$$

$$\Rightarrow \frac{\overline{BC}^2}{\overline{BP}^2} = \frac{PE}{AP}$$

mais $N \in (C)$

$$\Rightarrow \frac{\overline{NP}^2}{\overline{PA}^2} = \frac{PE}{AP} = \frac{\overline{BC}^2}{\overline{BP}^2} = \frac{\overline{AD}^2}{\overline{BP}^2}$$

d'où:

$$NP.PB = PA.AD$$

donc

$$(SP) = (DP)$$

donc

$$(SP) - (CP) = (DP) - (CP)$$

Ajoutons (CK). On a:

$$(DK) = (IK)$$

donc $$\frac{LK}{KA} = \frac{DA}{LI} \text{ et } \frac{\overline{LK}^2}{\overline{KA}^2} = \frac{\overline{DA}^2}{\overline{LI}^2}$$

mais $$\frac{\overline{LK}^2}{\overline{KA}^2} = \frac{EK}{KA}$$

car $$LK^2 = EK.KA$$

(puissance d'un point par rapport à un cercle);

donc $$\frac{\overline{BC}^2}{\overline{BK}^2} = \frac{EK}{KA}$$

d'où $$\overline{BC}^2 \cdot KA = \overline{BK}^2 \cdot EK$$

mais $$\overline{BC}^2 \cdot KA = b.BK + c$$

ajoutons $\overline{BK}^3$, on a:

$$\overline{BK}^3 + b.BK + c = (EK + BK)\,\overline{BK}^2$$
$$= BE.\overline{BK}^2 = a.\overline{BK}^2$$

donc BK est solution de l'équation.

De la même manière on montre que BP est solution de l'équation.

I–2 H est à l'extérieur de (C).

Si (H), l'hyperbole passant par H, rencontre (C) en un point de tangence ou en deux points d'intersection, le problème se ramène au précédent.

Si (H) ne rencontre pas (C), on construit toujours le rectangle sur un segment plus petit que GC ou plus grand que dans le cas précédent.

Si (H), après toutes ces tentatives, ne rencontre toujours pas (C), le problème est impossible et la démonstration sera à l'inverse de celle du cas précédent.

II– C est sur (C) ou à l'extérieur de (C).

Prolongeons CG et construisons un rectangle tel que son som-

$$\Rightarrow \frac{b}{X^2_0} = \frac{Y^2_0}{(X_0 - c/b)^2}$$

$$H \in (H_2) \Rightarrow \frac{Y^2_0}{(X_0 - c/b)^2} = \frac{(X_0 + a)}{(X_0 - c/b)}$$

$$\Rightarrow \frac{b}{X^2_0} = \frac{(X_0 + a)}{(X_0 - c/b)}$$

$$\Rightarrow bX_0 - c = X_0^3 + aX_0^2$$

$$\Rightarrow bX_0 = X_0^3 + aX_0^2 + c$$

Donc X_0 est solution.

E-21 $$X^3 + bX + c = aX^2$$

(figure E-21)

Soit $BE = a$, $BC = |b|^{1/2}.l$, $BC \perp BE$.

Soit AB sur le prolongement de BE et tel que:

$$\overline{BC}^2 \cdot AB = c.$$

AB est constructible à l'aide du lemme de E-13.

Soit (AGE) le demi-cercle (C) de diamètre AE. Alors le point C est dans (C) ou sur (C) ou à l'extérieur de (C).

I– Le point C est à l'intérieur de (C).

Le prolongement de BC coupe (C) en G. Complétons le rectangle (AC).

Soit $(CH) = (AC)$ un rectangle construit sur CG. H est de position connue car GC et (CH) sont connus. Alors H est dans (C) ou sur (C) ou à l'extérieur de (C).

I-1 H est dans (C).

Soit (H) l'hyperbole passant par H et admettant GC et CM pour asymptotes.

Alors (H) coupe nécessairement (C) en deux points, soient L et N. L et N sont de position connue.

Soit $NP \perp AE$, $LK \perp AE$ et $LI \perp BG$.

Alors: $(LC) = (CH) = (CA)$ (équation de l'hyperbole).

donc $\frac{\overline{AB}^2}{\overline{BL}^2} = \frac{CL}{LD}$

d'où $\overline{AB}^2 .LD = \overline{BL}^2 .CL$

mais $\overline{BL}^2 .CL = \overline{BL}^3 + BC.\overline{BL}^2 = \overline{BL}^3 + a.\overline{BL}^2$

d'où $\overline{AB}^2 \cdot BL = \overline{AB}^2 \cdot LD + \overline{AB}^2 \cdot BD = \overline{BL}^3 + a.\overline{BL}^2 + c$

Donc BL est solution.

Al-Khayyām note alors que parfois il y a deux solutions distinctes de ce problème. Ces deux solutions correspondent en effet aux deux points d'intersection autres que D. Or, bien qu'il ne dise pas explicitement que D ne correspond pas à une solution, puisque $BD = c/b$ ne vérifie pas l'équation, il reste que l'idée peut se dégager de son texte.

Remarque:

Reprenons maintenant la démarche d'al-Khayyām:

Soit (BC,BA) un système d'axes (OX,OY).

Soit $(H_1) = \{ (X,Y) ; (b^{1/2} - Y) X = b^{1/2}(c/b) \}$

et $(H_2) = \{ (X,Y) ; Y^2 = (X - c/b)(X + a) \}$

donc $D (c/b, 0) \in (H)_1 \cap (H_2)$

(1) - Si $(H_1) \cap (H_2) = D$, pas de solution.

(2) - Si $(H_1) \cap (H_2) \neq D$, il existe deux points H et H', autres que D et appartenant à $(H_1) \cap (H_2)$.

Soit $H (X_0, Y_0) \in (H_1) \cap (H_2)$

$$H \in (H_1) \Rightarrow (b^{1/2} - Y_0) X_0 = b^{1/2}(c/b)$$

$$\Rightarrow (b^{1/2} - Y_0) X_0 - (b^{1/2} - Y_0)(c/b) = b^{1/2}(c/b) - (b^{1/2} - Y_0)(c/b)$$

$$\Rightarrow (b^{1/2} - Y_0)(X_0 - c/b) + Y_0 (X_0 - c/b) = Y_0 (c/b) + Y_0 (X_0 - c/b)$$

$$\Rightarrow b^{1/2} (X_0 - c/b) = Y_0 X_0$$

$$\Rightarrow \frac{b^{1/2}}{X_0} = \frac{Y_0}{(X_0 - c/b)}$$

E-20 $X^3 + aX^2 + c = bX$

(figure E-20).

Soit $AB = |b|^{1/2}. l$ (voir les définitions); $BC = a$, $BC \perp AB$.

Soit BD sur le prolongement de BC et tel que:

$$\overline{AB}^2 . BD = c.$$

BD est constructible grâce au lemme de E-13. Complétons le rectangle $(ABDE)$.

Soit (GDH) l'hyperbole passant par D et admettant AB et AE pour asymptotes.

Soit (IDH) l'hyperbole de sommet D, de côté droit DC, de côté transverse DC et d'axe sur le prolongement de BD. (IDH) coupe (GDH) nécessairement en D.

Si (IDH) coupe (GDH) en un autre point, le problème et possible. Sinon, il est impossible. Si (IDH) est tangente à (GDH), ce sera le seul point commun (en plus de D).

Si (IDH) coupe (GDH), elle la coupera alors en deux points.

Ces différents cas sont établis d'après de livre IV des *Coniques*.

Soit H l'un de ces points communs à (IDH) et à (GDH). Soit $HM \perp AB$ et $KHL \perp BD$. HM et KHL sont de position et de grandeur connues puisque H est de position connue.

On a $(AH) = (AD)$ (équation de (GDH)).

En retranchant (EM), on a:

$$(MD) = (EH)$$

ajoutons (DH), on a: $(ML) = (EL)$

d'où $$\frac{AB}{BL} = \frac{HL}{LD}$$

et $$\frac{\overline{AB}^2}{\overline{BL}^2} = \frac{\overline{HL}^2}{\overline{LD}^2}$$

mais $$\frac{\overline{HL}^2}{\overline{LD}^2} = \frac{CL}{LD}$$

car $$\overline{HL}^2 = LC.LD \text{ (équation de } (IDH) \text{)}$$

d'où $$c = \overline{BL}^3 + a.\overline{BL}^2 + b.BL.$$

BL est donc solution.

Ce problème ne contient pas de cas impossibles; il a été résolu à l'aide d'un cercle et d'une hyperbole.

Remarque:

(1) La solution d'al-Khayyām revient à:

Soit (EK,EA) un système d'axes (OX,OY).

Soit: $$(C) = \{(X,Y); (Y-b^{1/2})^2 = (a+X)(c/b-X)\}$$

et $$(H) = \{(X,Y) ; XY = b^{1/2}.(c/b)\}$$

Alors $$C(c/b, b^{1/2}) \in (H) \cap (C).$$

Il existe donc $G(X_0,Y_0) \in (H) \cap (C)$; et $G(X_0,Y_0) \neq C$.

$$G \in (H) \Rightarrow X_0 Y_0 = b^{1/2}.(c/b)$$

$$\Rightarrow X_0Y_0 - b^{1/2}.X_0 = b^{1/2}.(c/b) - b^{1/2}.X_0$$

$$\Rightarrow X_0(Y_0 - b^{1/2}) = b^{1/2}(c/b - X_0)$$

$$\Rightarrow \frac{(Y_0-b^{1/2})}{(c/b-X_0)} = \frac{b^{1/2}}{X_0}$$

$$\Rightarrow \frac{(Y_0-b^{1/2})^2}{(c/b-X_0)^2} = \frac{b}{X^2_0}$$

$$G \in (C) \Rightarrow \frac{(Y_0-b^{1/2})^2}{(c/b-X_0)^2} = \frac{(a+X_0)}{(c/b-X_0)}$$

$$\Rightarrow \frac{b}{X^2_0} = \frac{(a+X_0)}{(c/b-X_0)}$$

$$\Rightarrow c - bX_0 = aX^2_0 + X^3_0$$

$$\Rightarrow X^3_0 + aX^2_0 + bX_0 = c.$$

Donc X_0 est solution.

(2) On remarquera dans ce problème une ébauche de la justification de l'intersection de deux courbes lorsque al-Khayyām introduit le point G, en utilisant la propriété de la tangente au cercle.

(H) l'hyperbole passant par C et admettant BE et EK comme asymptotes.

(H) coupe (C) au point C parce qu'elle coupe la tangente CK à (C) au point C.

Donc (H) coupe nécessairement (DGC) en un autre point G.

Donc G est de position connue car (H) et (DGC) sont de position connue.

Soit GI, GA les perpendiculaires sur EK et EA.

Alors:

$$(GE) = (BK) \text{ (équation de l'hyperbole).}$$

En retranchant aux deux membres (EL), on a:

$$(GB) = (LK)$$

d'où

$$\frac{GL}{LC} = \frac{EB}{LB}$$

car $EB = IL$. D'où:

$$\frac{\overline{GL}^2}{\overline{LC}^2} = \frac{\overline{EB}^2}{\overline{LB}^2}$$

mais

$$\frac{\overline{GL}^2}{\overline{LC}^2} = \frac{DL}{LC}$$

car $$GL^2 = LC.DL$$

(puissance d'un point par rapport à un cercle)

donc

$$\frac{\overline{EB}^2}{\overline{LB}^2} = \frac{DL}{LC}$$

d'où

$$\overline{EB}^2 . LC = \overline{LB}^2 DL$$

mais

$$\overline{BL}^2 . DL = \overline{BL}^3 + \overline{BL}^2 . BD = \overline{BL}^3 + a.\overline{BL}^2$$

d'où

$$\overline{EB}^2 \cdot LC + \overline{EB}^2 \cdot BL = \overline{BL}^3 + a.\overline{BL}^2 + b.BL$$

donc: $$a.\overline{AK}^2 + c = \overline{AK}^3$$

donc AK est la solution cherchée.

Remarques:

La discussion d'al-Khayyām revient à:

Soit (AB,AD) le système d'axes (OX,OY). Soit $C\ (a,(c/a)^{1/2})$.

Soit (H) l'hyperbole équilatère passant par C:

$$(H) = \{ (X,Y)\ ;\ XY = a\,(c/a)^{1/2} \}$$

Soit (P) la parabole:

$$(P) = \{ (X,Y);\ Y^2 = a\,(X-a) \}$$

Alors (H) et (P) se coupent nécessairement en un point $E\,(X_0, Y_0)$

$$E \in (H) \Longrightarrow X_0Y_0 = a\,(c/a)^{1/2}$$

$$\Longrightarrow \frac{X_0}{(c/a)^{1/2}} = \frac{a}{Y_0}$$

$$\Longrightarrow \frac{X^2_0}{(c/a)} = \frac{a^2}{Y^2_0}$$

$$E \in (P) \Longrightarrow Y^2_0 = a\,(X_0 - a)$$

$$\Longrightarrow \frac{a^2}{Y^2_0} = \frac{a}{(X_0 - a)}$$

$$\Longrightarrow \frac{(c/a)}{X^2_0} = \frac{X_0 - a}{a}$$

$$\Longrightarrow X^3_0 = aX^2_0 + c$$

E-19 $$X^3 + aX^2 + bX = c$$

(figure E-19)

Soit $BE = |b|^{1/2}.\,l$ (voir les définitions). Soit BC tel que: $BC \perp BE$ et:

$$\overline{BE}^2 . BC = c.$$

$BC = c/b$ est constructible grâce au lemme de E-13.

Soit $BD = a$ sur le prolongement de BC. Soit (DGC) le demi-cercle (C) de diamètre DC. Complétons le rectangle $(BCKE)$. Soit

Alors: $(HEIG) = (ABCD)$.

En effet:

$$\frac{(AC)}{(HG)} = \frac{AB}{K} = \frac{EI}{BD}$$

D'où le résultat.

Soit maintenant $AB = a$, S un solide de hauteur AB, de base un carré, de côté BC et tel que:

$$S = \overline{BC}^2 \,.\, AB = c.$$

La constructibilité de BC est possible grâce au lemme.

Soit $BC \perp AB$. Complétons le rectangle $(ABCD)$. (figure E-19) Soit (CEG) l'hyperbole d'asymptotes AB et AD passant par C. Soit (BEH) la parabole de sommet B, d'axe AB et de côté droit AB. (CEG) et (BEH) se coupent nécessairement. Soit E leur point d'intersection. E est donc de position connue.

Soit $EI \perp AD$ et $EK \perp AB$.

On a: $(EA) = (CA)$; (équation de (CEG))

donc
$$\frac{AK}{BC} = \frac{AB}{EK}$$

car: $EI = AK$ et $AB = CD$.

d'où :
$$\frac{\overline{AK}^2}{\overline{BC}^2} = \frac{\overline{AB}^2}{\overline{EK}^2}$$

mais:
$$\overline{EK}^2 = KB.AB$$

puisque EK est une ordonnée de (BEH),

donc:
$$\frac{\overline{AB}^2}{\overline{EK}^2} = \frac{AB}{KB}$$

on a donc:

$$\frac{\overline{BC}^2}{\overline{AK}^2} = \frac{BK}{AB}$$

d'où:
$$\overline{BC}^2 \,.\, AB = \overline{AK}^2 \,.\, BK$$

donc:
$$\overline{AK}^2 \,.\, AB + \overline{BC}^2 \,.\, AB = \overline{AK}^3$$

a) (H) est asymptote à CE; donc tous les points de (H) ont leurs abscisses à droite de C.

b) Par construction, tous les points de (P) ont leurs abscisses à gauche de A.

De a) et de b) on déduit que tout point $I\,(X,Y)$ de $(H) \cap (P)$ a sa projection entre C et A. Donc:

$$0 < X < a.$$

c) (H) est convexe et s'éloigne indéfiniment de AC. (P) est concave. D est à l'extérieur de (P). Donc (P) et (H) ne peuvent pas se couper à gauche de D. Donc si $I\,(X,Y) \in (H) \cap (P)$, alors:

$$c^{1/3} < X.$$

Finalement on a nécessairement:

$$c^{1/3} < X < a.$$

(5)– Les conditions: $c^{1/3} < a$ et $c^{1/3} \leqslant \frac{a}{2}$ sont des essais pour obtenir les conditions d'existence de la racine positive; mais elles ne sont pas des conditions nécessaires et suffisantes; elles restent formulées d'une manière géométrique. Les conditions complètes seront obtenues par le successeur d'al-Khayyām, Sharaf al-Dīn al-Tūsī.

E-18 $$X^3 = aX^2 + c$$

Lemme:

Soit $(ABCD)$ un solide de base un carré (AC). Construire un solide dont la base soit égale à un carré et la hauteur égale à un segment EI donné et tel que ce solide soit égal à $(ABCD)$.

Soit K un segment tel que: (figure L-3)

$$\frac{EI}{BD} = \frac{AB}{K}$$

Soit EG un segment vérifiant:

$$\frac{AB}{EG} = \frac{EG}{K}$$

et tel que : $EG \perp EI$.

Complétons (IG). Soit $EH \perp EG$ et $EH = EG$.

Complétons le solide $(HEIG)$.

2– Si $c^{1/3} > \frac{a}{2}$, D est à l'extérieur de (P) car:

$$c^{2/3} > c^{1/3}(a - c^{1/3}).$$

Donc si (H) et (P) ont des points communs (deux points d'intersection ou un point de tangence), leurs abscisses X vérifient nécessairement:

$$c^{1/3} < X < a,$$

et le problème a une solution si (H) et (P) sont tangentes, deux solutions si (H) et (P) se coupent en deux points.

Si (H) et (P) ne se coupent pas, il n'y a pas de solution.

3– Si $c^{1/3} < \frac{a}{2}$, alors (H) et (P) se coupent nécessairement en deux points et le problème a deux solutions.

En effet: Soit $I(X,Y) \in (H) \cap (P)$.

$$I \in (H) \Rightarrow XY = c^{2/3}$$

$$\Rightarrow \frac{X}{c^{1/3}} = \frac{c^{1/3}}{Y}$$

$$I \in (P) \Rightarrow Y^2 = c^{1/3}(a - X)$$

$$\Rightarrow \frac{c^{1/3}}{Y} = \frac{Y}{a - X}$$

$$\Rightarrow \frac{X}{c^{1/3}} = \frac{c^{1/3}}{Y} = \frac{Y}{a - X}$$

$$\Rightarrow \frac{X^2}{c^{2/3}} = \frac{c^{1/3}}{a - X}$$

$$\Rightarrow c = X^2(a - X)$$

$$\Rightarrow X^3 + c = aX^2$$

(3)– La condition: $c^{1/3} < a$ pouvait être obtenue algébriquement:

$$X^3 + c = aX^2 \Rightarrow X^3 < aX^2 \Rightarrow X < a$$

D'autre part:

$$X^3 + c = aX^2 \Rightarrow c < aX^2 < a^3 \Longrightarrow c^{1/3} < a$$

(4)– La condition: $c^{1/3} < X < a$, affirmée par al-Khayyām, utilise implicitement:

En effet, si X était solution, il y aurait trois possibilités:

a) $X = c^{1/3}$

donc: $c \geqslant aX^2 = X^3 + c$, impossible.

b) $X < c^{1/3}$

donc: $aX^2 < c < X^3 + c$, impossible.

c) $X > c^{1/3}$

donc: $X^3 > aX^2$, impossible.

3° *cas:*

$a > c^{1/3}$

Suivant les cas de figure, on a:

$c^{1/3} = \frac{a}{2}$, (figure 1) ; $c^{1/3} > \frac{a}{2}$, (figure 2) ; $c^{1/3} < \frac{a}{2}$, (figure 3).

Soit (CA, CE), le système d'axes OX, OY. Soit $D\,(c^{1/3}, c^{1/3})$.

Soit (H) l'hyperbole passant par D et d'asymptotes OX, OY.

$$(H) = \{ (X,Y) ; XY = c^{2/3} \}$$

et soit (P), la parabole:

$$(P) = \{ (X,Y) ; Y^2 = c^{1/3}(a - X) \}$$

1 – Si $c^{1/3} = \frac{a}{2}$ alors $D \in (P)$ car $c^{2/3} = c^{1/3}\,(a - c^{1/3})$.

Mais (H) et (P) se coupent en un autre point $I\,(X,Y)$. Alors le problème a deux solutions: les abscisses de D et I. Quant à la deuxième solution, on peut raisonner ainsi:

Si $a = 2c^{1/3}$ alors $X_1 = c^{1/3}$ est solution.

D'autre part la seconde racine X_2 vaut dans ce cas:

$$X_2 = \frac{c^{1/3}}{2}(1+\sqrt{5})$$

On note qu'al-Khayyām n'a pas recours explicitement, ici, à la concavité de (P), à la convexité de (H) et à la continuité des graphes que des mathématiciens comme Ibn al-Haytham ont utilisées- géométriquement bien entendu – dans des problèmes analogues.

Dans tous les cas de figure, soit I l'intersection de (H) et (P). Soit G la projection de I sur CE dans la figure 2.

On a: $(IC) = (DC)$ d'après l'équation de (H).

Donc: $$\frac{GC}{BC} = \frac{BC}{IG}.$$

Mais $I \in (P)$, d'où: $\overline{IG}^2 = AG.BC.$

Donc: $$\frac{BC}{IG} = \frac{IG}{GA}$$

donc: $$\frac{GC}{BC} = \frac{BC}{IG} = \frac{IG}{GA}$$

d'où: $$\frac{\overline{GC}^2}{\overline{BC}^2} = \frac{BC}{GA}$$

d'où: $$c = \overline{BC}^3 = \overline{GC}^2 . GA$$

donc: $$c + \overline{GC}^3 = \overline{GC}^2(GA+GC) = \overline{GC}^2 \cdot CA = a.\overline{GC}^2$$

donc GC est solution.

On procède de la même manière pour les deux autres cas de figure.

Pour le troisième cas de figure ($c^{1/3} < \frac{a}{2}$), il y a deux solutions distinctes correspondant aux deux points d'intersection de (H) et (P).

Remarques:

(1)- Dans (1) al-Khayyām introduit une nouvelle restriction:

Si $c^{1/3} \leqslant \frac{a}{2}$, le problème est toujours possible.

Il reste le cas: $\frac{a}{2} < c^{1/3} < a$, où il y a encore discussion.

(2)- Examinons maintenant la solution d'al-Khayyām.

1° *et* 2° *cas*:

$$a \leqslant c^{1/3}. \text{ Pas de solution.}$$

On complète le carré (DC) dans les trois cas de figure.

Soit (H) l'hyperbole passant par D et admettant comme asymptotes AC et CE;

$(H) = (DG)$ dans (figure 1), $(H) = (DI)$ dans les (figures 2 et 3).

Soit (P) la parabole de sommet A, d'axe AC et de côté droit BC;

$(P) = (AI)$ dans (figure 1), $(P) = (AL)$ dans (figure 2), $(P) = (AK)$ dans (figure 3).

(H) et (P) sont de position connue.

Dans la figure 1:

(P) passe par D, car:

$$\overline{DB}^2 = AB.BC \text{ d'après l'équation de la parabole.}$$

Donc (H) coupe (P) en D.

Mais (P) coupera encore (H) en un autre point, par argument de convexité et de courbure intuitivement évident pour al-Khayyām.

Dans la figure 2:

D est à l'extérieur de (P) , car:

$$\overline{DB}^2 > AB.BC.$$

Si BD coupe (P) en D', on a

$$\overline{BD'}^2 = AB.BC < \overline{DB}^2$$

donc $BD' < BD.$

Alors si (H) et (P) se coupent ou sont tangentes en un point, la projection de celui-ci sur AC est nécessairement entre A et B; et le problème est possible. Sinon il sera impossible.

Dans la figure 3:

$-\left(c^{1/3} < \frac{a}{2}\right) - D$ est à l'intérieur de (P).

Si BD coupe (P) en D', on a:

$$\overline{BD'}^2 = AB.BC > \overline{BD}^2$$

donc: $BD' > BD$

donc (H) et (P) se coupent en deux points. (1)

Alors H est égal, ou plus grand, ou plus petit que AC.

1° *cas*: $H = AC$

Le problème est alors impossible.

En effet, supposons que la solution X existe, alors X est égal à H ou plus grand ou plus petit que H.

a) Si $X = H$

on a: $$aX^2 = AC \cdot X^2 = H^3 = c$$

ce qui est impossible car:

$$aX^2 = X^3 + c.$$

b) Si $X < H$

on a: $$AC.X^2 < c$$

donc $$aX^2 < c < X^3 + c$$

également impossible.

c) Si $X > H$

on a: $$X^3 > AC.X^2 = aX^2$$

ce qui est impossible.

2° *cas*: $H > AC$

Le problème est impossible a fortiori, et dans les trois cas.

En effet:

a) $X = H \Rightarrow X > a \Rightarrow X^3 > aX^2$

b) $X < H \Rightarrow aX^2 < H^3 = c$; car $H > a$.

c) $X > H \Rightarrow X^3 > aX^2$; car $H > a$.

Donc: $H < AC$ sinon le problème est impossible.

3° *cas*: $H < AC$

Soit B sur AC tel que : $BC = H$.

Suivant les cas de figure, $BC = AB$ (figure E-17;1) ou $BC > AB$ (figure E-17;2) ou $BC < AB$ (figure E-17;3).

Ces cas correspondent respectivement aux cas suivants:

$$c^{1/3} = \frac{a}{2} \;;\; c^{1/3} > \frac{a}{2};\; c^{1/3} < \frac{a}{2}.$$

Soit: $(H) = \{(X,Y) ; c^{2/3} = XY\}$

et $(P) = \{(X,Y) ; Y^2 = c^{1/3}(X+a)\}$.

Alors (H) et (P) se coupent nécessairement en un point E (X_o, Y_o) qui vérifie:

$$X_o < c^{1/3}$$

car si: $X_o \geqslant c^{1/3}$

alors: $Y_o \leqslant c^{1/3}$

puisque $E \in (H)$. Donc:

$$Y^2_o \leqslant c^{2/3}$$

d'où $c^{1/3}(X_o + a) = Y^2_o \leqslant c^{2/3}$

d'où $X_o + a \leqslant c^{1/3} \leqslant X_o$

ce qui est absurde.

On a donc :

$$\mathrm{E} \in (P) \Rightarrow Y^2_o = c^{1/3}(X_o + a)$$

$$\Rightarrow \frac{(X_o + a)}{Y_o} = \frac{Y_o}{c^{1/3}}$$

$$E \in (H) \Rightarrow Y_o X_o = c^{2/3}$$

$$\Rightarrow \frac{Y_o}{c^{1/3}} = \frac{c^{1/3}}{X_o}$$

Donc $\dfrac{(X_o + a)}{Y_o} = \dfrac{Y_o}{c^{1/3}} = \dfrac{c^{1/3}}{X_o}$

d'où $\dfrac{X^2_0}{c^{2/3}} = \dfrac{c^{1/3}}{(X_o + a)}$

donc $c = X^2_0(X_o + a) = X^3_0 + aX^2_0$

Donc X_o est solution.

E-17 $X^3 + c = aX^2$

Soit $AC = a$. Soit H un segment tel que:

$$H^3 = c.$$

ce qui est absurde.

Donc $BG < BI$

$$E \in (AEK) \Rightarrow \overline{EG}^2 = AG.BC$$

donc $$\frac{AG}{EG} = \frac{EG}{BC}$$

d'autre part:

$E \in (EDN) \Rightarrow (EB) = (DB)$ d'après II-12 des *Coniques*.

Donc $$\frac{EG}{BC} = \frac{BC}{BG}$$

d'où $$\frac{AG}{EG} = \frac{EG}{BC} = \frac{BC}{BG}$$

donc $$\frac{\overline{BG}^2}{\overline{BC}^2} = \frac{BC}{AG}$$

donc $$\overline{BC}^3 = \overline{BG}^2 . AG = \overline{BG}^3 + \overline{BG}^2 . AB$$

d'où $$c = \overline{BG}^3 + a.\overline{BG}^2 .$$

BG est donc la solution cherchée.

Remarques:

(1) Al-Khayyām admet que les deux courbes se coupent nécessairement sans le démontrer comme précédemment. Mais cette fois il discute de la position de leurs points d'intersection. Cette discussion utilise seulement des relations algébriques. On peut y voir un début de la discussion sur les relations existant entre la solution éventuelle et les coefficients de l'équation.

Si en effet X_0 est solution, X_0 vérifie nécessairement: $X_0 < c^{1/3}$,

car: $$X^3{}_0 + aX^2{}_0 = c \Rightarrow X^3{}_0 < c \Rightarrow X_0 < c^{1/3}$$

condition nécessaire.

(2) La solution d'al-Khayyām revient à:

Soit $AB = a$, $BC = c^{1/3}$, $BC \perp AB$ pris respectivement comme axes OX et OY.

On peut construire une telle hyperbole d'après II-4 et I-59 des *Coniques*.

D et les deux asymptotes étant connus, (EDN) est de position connue.

Soit (AK) la parabole de sommet A, d'axe AI et de côté droit BC. (AK) est donc de position connue.

(EDN) et (AK) se coupent nécessairement. Soit E leur point d'intersection. E sera de position connue.

Soit $EG \perp AI$ et $EL \perp BC$. Ils sont de grandeur et de position connues.

Il est alors impossible que (EDN) et (AEK) se coupent en un point d'abscisse égale ou supérieure à BI.

En effet:

1° *cas*:

$$\text{Supposons } BG = BI$$

alors:

$$\overline{EG}^2 = AG.BI = AI.BI$$

d'après l'équation de (AK).

Mais : $EG = DI$ et $\overline{BI}^2 = \overline{DI}^2$

donc $BI = AI$

ce qui est absurde; donc: $G \neq I$.

2° *cas*:

$$\text{Supposons } BG > BI.$$

On a $EG < ID$. On aboutira, a fortiori, à la même absurdité.

Al-Khayyām, sans le dire, utilise toutefois la propriété de (EDN) qui se rapproche de son asymptote BI; en effet on a:

$$\overline{EG}^2 < \overline{ID}^2 = \overline{IB}^2$$

mais $\overline{EG}^2 = AG.BC = AG.BI$

donc $\overline{BI}^2 > AG.BI$

donc $BI > AG$

Alors :

$$E \in (H) \Longrightarrow Y_0^2 = (\frac{c}{b} + X_0)\, X_0$$

d'où $$\frac{(\frac{c}{b} + X_0)}{Y_0} = \frac{Y_0}{X_0}$$

$$E \in (P) \Longrightarrow b^{1/2} . Y_0 = X_0^2$$

d'où $$\frac{Y_0}{X_0} = \frac{X_0}{b^{1/2}}$$

donc $$\frac{(\frac{c}{b} + X_0)}{Yo} = \frac{Y_0}{X_0} = \frac{X_0}{b^{1/2}}$$

$$\frac{b}{X_0^2} = \frac{X_0}{(\frac{c}{b} + X_0)}$$

$$X_0^3 = b(\frac{c}{b} + X_0) = c + bX_0$$

donc X_0 est solution.

Notons qu'ici encore al-Khayyām n'essaie pas de démontrer, ou de discuter tout au moins ,l'intersection des deux courbes. La nécessité de celle-ci lui apparaît dans l'intuition de la continuité et de la convexité.

E-16 $$X^3 + aX^2 = c$$

(figure E-16)

Soit $AB = a$ et un cube égal à c, soit H le côté de ce cube.

La constructibilité de ce cube est possible grâce au lemme de E-3 ou grâce à E-3.

Soit I sur le prolongement de AB et tel que :

$$BI = H.$$

Complétons le carré $(BIDC)$.

Soit (EDN) l'hyperbole passant par D et ayant pour asymptotes BC et BI.

mais $EH = BI$ et $HB = EI$

et $\overline{EI}^2 = AB.BI$ (l'équation de la parabole)

d'où $\frac{BI}{EI} = \frac{EI}{AB}$

donc $\frac{AB}{HB} = \frac{HB}{BI} = \frac{BI}{CH}$

d'où $\frac{\overline{AB}^2}{\overline{HB}^2} = \frac{HB}{CH}$.

On a donc

$$\overline{HB}^3 = \overline{AB}^2 . CH .$$

Mais $\overline{AB}^2 . CH = \overline{AB}^2 . BC + \overline{AB}^2 . BH$

$= c + b.BH$

donc $\overline{HB}^3 = b.BH + c$

donc BH est la solution cherchée.

Ce problème ne contient pas de cas impossible. Il a été résolu à l'aide d'une parabole et d'une hyperbole.

Remarque:

La solution d'al-Khayyām revient à:

Soit $AB = b^{1/2}$; $BC = \frac{c}{b}$ et $BC \perp AB$.

Considérons AB, BC comme les axes OX, OY respectivement.

Soit $(P) = \{ (X,Y) ; b^{1/2}.Y = X^2 \}$

et $(H) = \{ (X,Y); \quad Y^2 = (\frac{c}{b} + X) X \}$

(P) et (H) se coupent nécessairement en un point $E (X_0, Y_0)$.

d'où $$X^3_0 = b\left(X_0 - \frac{c}{b}\right)$$

donc $$X^3_0 + c = bX_0 .$$

X_0 est donc une solution.

Chaque point d'intersection correspond donc à une solution. Il y a par conséquent une solution (double). deux solutions, ou zéro solution.

Notons que, dans (2), si X est solution elle doit vérifier nécessairement:

$$X > \frac{c}{b} .$$

Cette condition se déduit de la construction géométrique. Al-Khayyām ne la déduit cependant pas ici, alors qu'ailleurs il la signale.

E-15 $$X^3 = bX + c$$

(figure E-15)

Soit AB tel que $\overline{AB}^2 = b$. Soit BC un segment tel que:

$$\overline{AB}^2 . BC = c \qquad \text{et } BC \perp AB.$$

Comme précédemment BC est constructible grâce au lemme de E-13. Soit (DBE) la parabole de sommet B, d'axe AB et de côté droit AB. (DBE) sera tangente à BC d'après I-33 des *Coniques*.

Soit (GBE) l'hyperbole de sommet B, d'axe BC et de côté transverse BC.

(GBE) sera tangente à AB. (DBE) et (GBE) se recoupent nécessairement. Soit E ce point d'intersection.

(DBE) et (GBE) étant connues, E sera connu.

Soit $EI \perp AB$ et $EH \perp BC$, ils sont de grandeur et de position connues.

On a $$\overline{EH}^2 = CH.BH \qquad \text{(l'équation de l'hyperbole)}$$

d'où $$\frac{CH}{EH} = \frac{EH}{BH}$$

d'après I-11 des *Coniques*;

d'où $$\frac{AB}{BI} = \frac{BI}{BH} = \frac{BI}{EI} = \frac{IE}{IC}$$

donc $$\frac{\overline{AB}^2}{\overline{BI}^2} = \frac{BI}{IC}$$

donc $$\overline{BI}^3 = \overline{AB}^2 . IC$$

donc $$c + \overline{BI}^3 = \overline{AB}^2 . BC + \overline{BI}^3 = \overline{AB}^2 (IC + CB) = \overline{AB}^2 . BI = bX.$$

En conclusion, cette équation comprend différents cas dont certains sont impossibles.

Elle a été résolue à l'aide d'une parabole et d'une hyperbole.

Remarques:

(1)– Dans (1) al-Khayyām pose $BC = \frac{c}{b}$. La construction de BC est possible grâce au lemme de E-13.

(2)– La résolution d'al-Khayyām revient à:

Soit $AB = b^{1/2}$; $BC \perp AB$ et $BC = \frac{c}{b}$.

Considérons AB et BC comme les axes OY et OX respectivement.

Soit $(P) = \{ (X,Y); X^2 = b^{1/2} . Y \}$

$(H) = \{ (X,Y) ; Y^2 = X (X - \frac{c}{b}) \}$.

Alors si (P) et (H) se coupent en $E (X_0, Y_0)$, on a :

$$E \in (H) \Rightarrow Y_0^2 = X_0 (X_0 - \frac{c}{b}) \quad (2)$$

d'où $$\frac{X_0}{Y_0} = \frac{Y_0}{(X_0 - \frac{c}{b})}$$

$$E \in (P) \Rightarrow X_0^2 = b^{1/2} . Y_0$$

d'où $$\frac{b^{1/2}}{X_0} = \frac{X_0}{Y_0}$$

donc $$\frac{b}{X_0^2} = \frac{X_0}{(X_0 - \frac{c}{b})}$$

que Ibn al-Haytham a résolu ce problème – sans le traduire algébriquement cependant – à l'aide d'une hyperbole et d'une parabole. Al-Khayyâm connaissait la solution d'Ibn al-Haytham.[1] Son choix d'une parabole et d'un cercle est donc délibéré, très vraisemblablement par souci de simplicité.

E-14 $X^3 + c = bX$

(figure E-14)

Soit $AB = b^{1/2}. l$; soit BC tel que $BC \perp AB$ et:

$$\overline{AB}^2 . BC = c . \qquad (1)$$

Soit (DBE) la parabole de sommet B, d'axe AB et de côté droit AB. (DBE) est alors de position connue.

Soit (ECG) l'hyperbole de sommet C, d'axe BC et de côté transverse BC.

(ECG) est de position connue d'après I-45 des *Coniques*.

(DBE) et (ECG) se rencontrent ou non.

1e cas: (DBE) et (ECG) ne se rencontrent pas, le problème est alors impossible.

2e cas: Elles se rencontrent en un seul point qui est un point de tangence. Il sera connu.

3e cas: Elles se rencontrent en deux points, ces points seront connus. Soit E un point de rencontre; soient I et H les projections de E sur BC et BA respectivement. EI et EH sont de grandeur et de position connues.

On a : $E \in (ECG)$, donc:

$$\frac{\overline{EI}^2}{BI.IC} = \frac{BC}{BC}$$ d'après I-21 des *Coniques*.

Donc $$\overline{EI}^2 = BI.IC$$

d'où $$\frac{BI}{IE} = \frac{IE}{IC}$$

d'autre part

$$\overline{BI}^2 = \overline{EH}^2 = BH.BA \text{ puisque } E \in (DBE)$$

1. Voir *Mas'ala ʿadadīya mujassama* (un problème arithmétique solide), Mss India office 1270 / 17 / ff 118-119.

Cette équation, rappelle al-Khayyām, est toujours possible. Elle a été résolue par l'intersection d'un cercle et d'une parabole.

Remarques:

(1)- Al-Khayyām n'essaie pas ici de démontrer l'intersection. Il semble utiliser intuitivement un argument de continuité et de convexité, pour affirmer que les deux courbes se coupent nécessairement en D.

(2)- La solution d'al-Khayyām revient à:

Soit $AB = b^{1/2}$ et $BC = \frac{c}{b}$ Soit (P) la parabole de sommet B, d'axe $AB = OY$, de tangente au sommet $BC = OX$ et d'équation:

$$X^2 = b^{1/2} . Y.$$

Soit (C) le demi-cercle de diamètre BC. (P) et (C) se coupent nécessairement en un point D (X_0, Y_0).

Alors: $D \in (P) \Rightarrow X^2_0 = b^{1/2} . Y_0$

d'où $\frac{b^{1/2}}{X_0} = \frac{X_0}{Y_0}$

$D \in (C) \Rightarrow Y^2_0 = X_0 (c/b - X_0)$

donc $\frac{X_0}{Y_0} = \frac{Y_0}{(c/b - X_0)}$ (1)

donc $\frac{b^{1/2}}{X_0} = \frac{Y_0}{(c/b - X_0)}$

d'où $\frac{b}{X^2_0} = \frac{X_0}{(c/b - X_0)}$

on a $b (c/b - X_0) = X^3_0$

donc $X^3_0 + bX_0 = c$

et X_0 est solution de l'équation.

On note que d'après (1) la construction géométrique exigerait: $c/b > X$, si X était solution. Ceci correspond à la condition algébrique déduite de l'expression:

$$X^3 + bX = c \Rightarrow bX < c \Rightarrow X < c/b.$$

Mais cette condition n'est pas soulignée par al-Khayyām. On sait

donc $$\frac{(AC)}{(MH)} = \frac{GI}{ED}$$

car $$\frac{AB}{K} = \frac{GI}{ED}$$ d'après (2)

les deux solides sont donc égaux d'après XI-34 des *Eléments*.

Al-Khayyām dit d'abord ce qu'il entend par solide et par surface. Il applique ensuite le précédent lemme pour la construction d'un parallélépipède de base un carré donné, égal à un autre parallélépipède de hauteur et de base carrée données.

Soit alors AB le côté d'un carré (K) d'aire égale à b. Soit BC, la hauteur du solide construit sur le carré (K) et tel que:

$$\overline{AB}^2 . BC = c.$$

Le solide existe d'après le lemme précédent.

On a $BC \perp AB$. On prolonge AB jusqu'au point G. Soit (HBD) la parabole de sommet B, d'axe BG, de côté droit AB.
La parabole est de position connue. Elle est tangente à BC en B.
Soit (C) le demi-cercle de diamètre BC. (C) coupera nécessairement la parabole. Soit D le point d'intersection. D est connu. (figure E-13)
Soit $DG \perp BG$ et $DE \perp BC$. DG et DE sont connus.

Alors $\overline{DG}^2 = BG.AB$ (équation de la parabole)

donc $$\frac{AB}{DG} = \frac{AB}{BE} = \frac{BE}{BG} = \frac{BE}{ED}$$

Mais $$\frac{BE}{ED} = \frac{ED}{EC}$$

(puissance d'un point par rapport à un cercle),

donc $$\frac{AB}{BE} = \frac{ED}{EC}$$

d'où $$\frac{\overline{AB}^2}{\overline{BE}^2} = \frac{BE}{EC} \text{ car } \frac{\overline{AB}^2}{\overline{BE}^2} = \frac{ED}{EC} \cdot \frac{BE}{ED} = \frac{BE}{EC}$$

donc $\overline{AB}^2 . EC = \overline{BE}^3$

On a $\overline{AB}^2 . EC + \overline{AB}^2 . EB = \overline{BE}^3 + \overline{AB}^2 . EB$

donc $c = \overline{AB}^2 . BC = \overline{BE}^3 + \overline{AB}^2 . EB = \overline{BE}^3 + b . EB.$

Notons que dans (2), al-Khayyām utilise le fait que $a < X$, mais sans le prouver. Sa démonstration revient à:

$$\frac{aX^2}{bX} = \frac{aX}{b}$$

donc
$$\frac{aX^2 + bX}{bX} = \frac{aX + b}{b}$$

mais
$$aX^2 + bX = X^3$$

donc
$$\frac{X^3}{bX} = \frac{X^2}{b} = \frac{aX + b}{b}$$

d'où finalement

$$X^2 = aX + b.$$

E-13 $\qquad X^3 + bX = c$

Lemme:

Soit ($ABCDE$) un parallélépipède rectangle de base le carré ($ABCD$).

Soit (MH) un autre carré donné. Construire sur (MH) un parallélépipède rectangle égal au solide ($ABCDE$).

Démonstration: (voir figure L-2)

Soit MG un côté de (MH). Soit K tel que :

$$\frac{AB}{MG} = \frac{MG}{K} \qquad (1)$$

Soit ED la hauteur de ($ABCDE$).

Soit GI un segment qui vérifie: $GI \perp (MH)$ en G

et
$$\frac{AB}{K} = \frac{GI}{ED} \qquad (2)$$

Alors ($MGIH$) est le solide cherché. En effet, on a:

$$\frac{(AC)}{(MH)} = \frac{AB}{K}.$$

car
$$\frac{(AC)}{(MH)} = \frac{\overline{AB}^2}{\overline{MG}^2} = \frac{AB}{MG} \cdot \frac{MG}{K} \qquad \text{d'après (1)}$$

Posons: $b = XY$ (1)

On a donc par construction:

$$(X + Y)X^2 = aX^2$$

car $(X + Y)X^2 = X^3 + bX = aX^2$

donc $X + Y = a$

donc $X^2 + b = aX$

car $(X + Y)X = X^2 + b.$

Notons que (1) ne correspond pas à sa définition du nombre-plan. Elle équivaut à la construction d'un rectangle connaissant sa surface et un de ses côtés, problème déjà résolu par E-1.

E-12 $X^3 = aX^2 + bX$

Al-Khayyām veut montrer que E-12 est équivalente à E-9, c'est-à-dire à:

$$X^2 = aX + b.$$

Ici aussi il considère des valeurs particulières des coefficients, mais il raisonne sur des coefficients quelconques positifs.

$$X^3 = X^2 + 3X \qquad (1)$$

Soit $(ABCDE)$ un cube X^3 qui vérifie (1) (figure E-12).

Soit $AG = a = 1$, G entre A et B. (2)

Complétons le solide $(AGIC) = aX^2 = X^2$.

Donc $(GE) = bX = 3X$.

D'aprés XI-32 des *Eléments*, on a:

$$\frac{(AGIHC)}{(GE)} = \frac{(GC)}{(GL)}$$

car les hauteurs sont égales.

Mais $(GC) = aX = X$

et $(GL) = b = 3$

donc $(CB) = X + 3.$

Mais $(CB) = X^2$

donc $X^2 = X + 3.$

E-11 $$X^3 + bX = aX^2$$

Al-Khayyām veut montrer que E-11 équivaut à E-8, c'est-à-dire:

$$X^2 + b = aX .$$

Il considère en fait:

$$X^3 + 2X = 3X^2 .$$

Le choix des coefficients particuliers ne peut être expliqué que pour des raisons didactiques; car il raisonne sur des coefficients quelconques positifs.

Soit le cube $(ABCDE)$ tel que si X est son côté, on ait: (figure E-11)

$$(ABCDE) + 2X = 3X^2.$$

Soit (H) un carré tel que:

$$(H) = (CB) = X^2 .$$

Soit un segment K tel que:

$$K = 3 .$$

On a $$K.(H) = 3X^2 .$$

Soit (AL) le rectangle construit sur AC et tel que:

$$(AL) = 2 .$$

Complétons le parallélépipède $(AGCID)$. On a:

$$(AGCID) = 2X.$$

Mais $$GB.AC^2 = (BI)$$

et $$(AI) = 2X$$

donc $$(BI) = X^3 + 2X$$

donc $$(BI) = 3X^2.$$

On a alors, comme dans le problème précédent:

$$GB = 3$$

et $$(BL) = X^2 + 2$$

donc $$X^2 + 2 = 3X \quad \text{car } (BL) = AB.3.$$

La démonstration d'al-Khayyām revient à:

Soit un cube de côté X vérifiant:

$$X^3 + bX = aX^2.$$

Soit $KC = \sqrt{b + a^2/4}$. Soit $(ABCD)$ le carré de côté BC. C'est le carré cherché.

E-10 $$X^3 + aX^2 = bX$$

Al-Khayyām veut montrer que E-10 équivaut à E-7 : $X^2 + aX = b$.

Soit $(ABCDE)$ un cube X^3; et G sur AB tel que :

$$AG = a.$$

On complète le solide $(AGHICD)$ (voir figure E-10).

alors $$(AI) = aX^2$$

et on doit avoir

$$(BI) = bX$$

$$(BI) = X^3 + aX^2$$

Soit (K) un rectangle tel que :

$$(K) = b$$

On a $$X = AD$$

donc $$bX = (K).AD$$

et $$(HB).AD = X^3 + aX^2$$

mais $$(K).AD = (BI)$$

donc $$\frac{(K)}{(HB)} = \frac{AD}{AD}$$

donc $$(K) = (HB)$$

mais $$(HB) = (CB) + (HA) = (CB) + a.AB$$

donc $$(K) = b = X^2 + aX.$$

La preuve d'al-Khayyām revient donc à :

$$(X^2 + aX)X = X^3 + aX^2$$

et $$bX = X^3 + aX^2$$

donc $$\frac{b}{X^2 + aX} = 1$$

d'où $$b = X^2 + aX.$$

Soit: $(AD) = b.$

Alors $(ABCH) - AD = (EC)$ (1)

et $(EC) = aX = 5X$

donc $EB = 5 = a.$

Soit G tel que :

$$GB = GE$$

alors $EA.BA + \overline{EG}^2 = \overline{GA}^2$

mais $EA.BA = (AD) = b$ qui est connu

et $\overline{GE}^2$ et EG sont connus: $EG = a/2$

donc $\overline{GA}^2$ et GA sont connus;

d'où $AB = GA + GB$ est connu.

Notons que cette construction n'est possible que si $b < X^2$, c'est-à-dire $X > b^{1/2}$, condition non énoncée par al-Khayyām, mais vérifiée par la construction géométrique.

Si donc on résume la démarche d'al-Khayyām, elle revient à ceci:

Si X est une solution alors:

$$X^2 = aX + b$$

donc $X^2 - b = aX \Longrightarrow b < X^2$

et $(X - a)\, X + (a/2)^2 = (X - a/2)^2$

donc $b + a^2/4 = (X - a/2)^2$

d'où $X = a/2 + \sqrt{b + a^2/4}.$

Quant à l'existence de la solution, elle est équivalente pour al-Khayyām à la constructibilité du carré $X.X$ tel que:

$$X^2 = aX + b$$

ce qu'il démontre à la fin de E-9:

Supposons $(I) = b$, un rectangle. Soit $BE = a$ (figure E-9;2).

On construit un carré $(H) = (I)$. Soit $EK = a/2$.

On construit un carré $(G) = (H) + EK^2 = b + a^2/4.$

cet examen est manifestement imposé par la représentation géométrique de la solution, si elle existe.

(2) L'existence de X est équivalente à un problème de construction, rendu possible par la condition : $b < a^2/4$. Il s'agit de VI-28 des *Eléments*. "Construire sur un segment donné un rectangle composé d'un carré et d'un autre rectangle".

Al-Khayyām procède ainsi:

Soit AB donné $= a$.

Soit (E) un rectangle donné $= b$, tel que

$$(E) < (AB/2)^2$$

Construisons sur AB, un rectangle (AG) égal à (E) et tel qu'il se complète par le carré (CD) sur AB (figure E-8;2). La construction est possible car $(E) < (AB/2)^2$ (d'après les *Eléments* VI-28). Alors, d'après les *Données*, proposition 58, CB sera connu.

(3) Notons enfin qu'en suivant la démarche géométrique on aboutit par l'analyse à: (figure E-8;1)

$$\overline{GA}^2 = (BE/2)^2 - EA.AB$$
$$= a^2/4 - b$$

d'où découle nécessairement, $\overline{GA}^2$ étant positif, que:

$$b < a^2/4$$

sans invoquer VI-27 et 28 des *Eléments* ni 58 des *Données*. Mais al-Khayyām semble tenir, comme il l'avait dit dans l'introduction, à partir des *Eléments* d'Euclide.

(4) Pour les conditions d'existence d'une solution entière al-Khayyām renvoie à E-7.

E-9 $X^2 = aX + b$

Al-Khayyām donne directement:

$$X = \sqrt{(a/2)^2 + b} + a/2 \; .$$

Sans parler de la démonstration numérique, il donne immédiatement la preuve géométrique. (Voir figure E-9;1).

Soit $(ABCH)$ un carré de côté X tel que:

$$X^2 = (ABCH) = 5X + 6.$$

Donc $$EB = 10$$

1e cas : $AB = (EB)/2 \Rightarrow AB = 5$ (figure E-8;1)

2e cas: $AB \neq (EB)/2$

donc $AB > (EB)/2$ ou $AB < (EB)/2$.

Soit, dans ce cas, G le milieu de EB,

on a $EA.AB + GA^2 = GB^2$ (d'après les *Eléments* II-5)

mais $$EA.AB = b$$

donc $$GA^2 = GB^2 - EA.AB$$

avec b et $GB = (a/2)$ connus; donc GA l'est aussi.

Finalement on a:

$$X_1 = GB - GA$$

si $AB < EB/2$

$$X_2 = GB + GA$$

si $AB > EB/2$

Remarques:

(1) La preuve géométrique peut être ainsi écrite:

Si X était solution, on aurait:

1°– Si $X = a/2$ alors $b = a^2/4$.

2°– Si $X > a/2$, alors:

$$(a - X)X + (X - a/2)^2 = (a/2)^2$$
$$(X - a/2)^2 = a^2/4 - b$$
$$X = a/2 + \sqrt{a^2/4 - b}$$

3°– Si $X < a/2$, alors:

$$(a - X)^2 + (a/2 - X)^2 = (a/2)^2$$
$$(a/2 - X)^2 = a^2/4 - b$$
$$X = a/2 - \sqrt{a^2/4 - b}$$

La première partie de la démonstration géométrique est donc une analyse pour donner l'expression de la racine. La condition d'existence – $b \leqslant a^2/4$ – donnée par al-Khayyām n'intervient pas ici. S'il examine les trois cas:

$$X = a/2, \qquad X < a/2, \qquad X > a/2$$

d'où $$b + (a/2)^2 = (X + a/2)^2$$

d'où $$(b + (a/2)^2)^{1/2} = X + (a/2)$$

d'où $$X = (b + (a/2)^2)^{1/2} - (a/2).$$

Si l'on se donne la transformation affine $X \rightarrow X + (a/2)$, cette preuve géométrique revient à résoudre E-2.

$$(X^2 + aX = b) \Longleftrightarrow ((X + (a/2))^2 = b + (a^2/4)).$$

La deuxième preuve géométrique peut également être résumée ainsi

$$X^2 + 4(a/4)^2 + 4(X(a/4)) = (X + (a/2))^2$$

mais $$X^2 + 4(X.(a/4)) = X^2 + aX = b$$

donc $$b + (a^2)/4 = (X + (a/2))^2$$

$$X = \sqrt{b + (a/2)^2} - (a/2).$$

Quant à l'existence de X, la démarche d'al-Khayyām est la suivante:

Soit AB donné : $AB = a.l.$ On construit sur AB le rectangle:

$$X^2 + AB.X = (b.l).l$$

d'après le Livre VI-29 des *Eléments*. Alors X^2 est un carré connu d'après les *Données* d'Euclide (proposition 59).

E-8 $$X^2 + b = aX$$

Al-Khayyām affirme d'abord:

Si $b > (a/2)^2$, le problème est impossible.

Si $b = (a/2)^2$, la solution existe et $X = a/2$

Si $b < (a/2)^2$, on a deux solutions:

$$X_1 = \sqrt{(a/2)^2 - b} + a/2$$

$$X_2 = a/2 - \sqrt{(a/2)^2 - b}$$

La preuve numérique est identique à la preuve géométrique et al-Khayyām donne ainsi cette dernière:

Soit $(ABCD)$ un carré $= X^2$

Soit $(ED) = b$, construit sur AD.

On a $EB.X = (EC) = 10X$; $a = 10$ pour l'exemple.

étant donné la connaissance de l'époque – pour ne parler que de la sienne propre – des équations quadratiques. S'agit-il comme l'affirme Woepcke d'une erreur de la part d'al-Khayyām ? Il écrit en effet: "L'auteur se trompe; aucune des deux conditions n'est nécessaire pour que X soit un nombre entier"; ou bien est-ce un problème particulier résolu par al-Khayyām ?

Si par preuve numérique al-Khayyām sous-entend une solution réelle positive et des coefficients réels positifs, les deux conditions sont en effet superflues. Celles-ci le sont encore si l'on se restreint aux solutions rationnelles ou même entières positives. En effet:

Soit $n \in N$, quelconque.

Soit $\beta \in R^*_+ - N$ et $\beta > n$

alors n est solution (positive) de l'équation:

$$X^2 + (\beta - n)\, X = n\beta$$

($-\beta$ en est la solution négative).

Pourtant dans ce cas $a = \beta - n$ n'est même pas entier et

$$(a/2)^2 + b = \left(\frac{\beta + n}{2}\right)^2$$

n'est pas un carré d'entier car $\beta + n$ est un irrationnel. Et alors al-Khayyām se trompe.

Si par numérique, al-Khayyām sous-entend solution rationnelle positive et coefficients rationnels positifs comme c'est l'usage à son époque, alors la première condition est superflue et la seconde est nécessaire.

Si enfin, par numérique il entend solution entière et coefficients dans N* également, alors la seconde condition est nécessaire tandis que la première est superflue. C'est ,nous semble-t-il, le cas examiné par al-Khayyām, c'est à dire la recherche particulière d'une solution entière d'une équation dont le polynôme associé est à coefficients entiers.

(2) La première démonstration géométrique peut être ainsi résumée:

On a :

$$(X + a)X + (a/2)^2 = (X + a/2)^2$$

2ème *preuve géométrique*: (voir figure E-7;2)

Soit $(ABCD)$ un carré. Soit E sur BA tel que: $EA = a/4$.

Soit G sur DA tel que: $GA = a/4$.

Complétons le quadrilatère passant par E et G et de côtés parallèles à ceux de $(ABCD)$. On obtient un carré d'après *VI-24* des *Eléments* car $(ABCD)$, (EG), (CI) sont des carrés. Donc:

$$(EG) = (CI) = (a/4)^2 = (5/2)^2.$$

Donc la somme des quatre petits carrés est 25, c'est-à-dire $(a/2)^2$.

D'autre part:

$$(GB) = (5/2)\,AB.$$

Donc la somme des quatre rectangles égaux à (GB) vaut 10. AB.

Mais $\quad AC + 10.AB = 39$

donc $\quad (HI) = 64 = b + (a/2)^2$.

Alors $\quad AB = \sqrt{64} - 5 = \sqrt{b + (a/2)^2} - (a/2)$.

Al-Khayyām termine le problème par la démonstration de la constructibilité du carré de la solution. (Voir figure E-7; 3). Soit $AB = 10$. Supposons qu'on cherche un carré (AD) de côté AC tel que:

$$(AD) + AB.AC = b$$

Soit (E) le rectangle de côtés 1 et b tel que:

$$(E) = b$$

Construisons sur AB un rectangle tel que AC soit le côté d'un carré (AD) et tel que:

$$(BD) = (E)$$

C'est possible d'après VI-29 des *Eléments*.

Alors, d'après la proposition 59 des *Données*, AC sera nécessairement connu.

Remarques:

(1) Il est surprenant qu'al-Khayyām donne les conditions:

$$(1) - a = 2n \; ; n \in N$$

$$(2) - (a^2)/4 + b = m^2 \; ; m \in Q^+$$

La préoccupation d'al-Khayyām, comme on peut le constater, est de démontrer l'existence de la solution.

E- 6 est donc ramenée à E- 1.

E-7 $$X^2 + aX = b$$

Al-Khayyām reprend ici directement l'exemple d'al-Khwārizmī:

$$X^2 + 10X = 39$$

mais pour donner l'expression générale

$$X = \sqrt{(a/2)^2 + b} - (a/2)\,.$$

Al-Khayyām affirme que le problème numérique n'est possible que si:

(1) a est pair pour que $(a/2)$ existe.

(2) $(a/2)^2 + b$ est un carré.

Dans ce cas, la preuve numérique est conforme à la preuve géométrique.

Al-Khayyām donne ensuite deux preuves géométriques:

1ère *preuve géométrique*: (voir figure E-7;1)

Soit (AC) un carré de côté AB, tel que:

$$(AC) + 10.AB = 39.$$

Supposons que:

$$(CE) = 10.AB$$

donc $$DE = 10$$

Soit alors G tel que:

$$GE = GD$$

alors: $$EA.AD + \overline{DG}^2 = \overline{GA}^2$$

mais DG^2 est connu puisque:

$$DG = DE/2,$$

et $(BE) = EA.AD = 39$ est connu.

Donc GA^2 est connu ainsi que GA;

Donc $$DA = GA - GD \text{ est connu.}$$

Donc : $(AC) = 4$.

(voir figure E–5)

Remarque:

Dans les deux cas – numérique et géométrique – al-Khayyām ramène E–5 à E–2.

En effet dans la preuve numérique, on a:

$$(X^3 = aX) \Leftrightarrow (X^2 = a) .$$

Dans la preuve géométrique, il pose V un cube de côté X et tel que:

$$V = a.X$$

comme $X.X^2 = X^3 = V = X.a$

alors: $X^2 = a.$

E-6 $X^3 = aX^2$

Al-Khayyām affirme qu'elle est équivalente à : $X = a$, puisque:

$$\frac{a}{X} = \frac{aX^2}{X^3}$$

Al-Khayyām se réfère, ici, aux *Eléments*, Livre VIII, sans préciser le numéro de la proposition. Il s'agirait plutôt de VII-19.

La preuve géométrique revient à construire un cube de côté X, soit $(ABCDE)$ et tel que: $(ABCDE) = aX^2$

par exemple: $(ABCDE) = 2X^2$.

Soit $(AC) = X^2$.

Alors $2\,(AC) = (ABCDE)$

et $BD.(AC) = (ABCDE)$.

Donc $BD = 2$.

(voir figure E- 6)

Il est évident que l'exemple ne diminue en rien la généralité de la démonstration. Celle-ci revient donc à construire un cube $(ABC$-$DE)$ de volume V, de surface de base S et tel que:

$$V = a.S .$$

C'est le cube de côté a.

Les démonstrations, numériques et gèométriques, sont aussi rapidement indiquées. Peut-être al-Khayyām, sachant que E–4 se ramène à E–1, a-t-il voulu ainsi donner un exemple et indiquer les démonstrations sans insister.

La preuve numérique:

$$X.X = X^2$$

et $X.5 = X^2$

donc $X = 5$.

La preuve géométrique est analogue à la précédente :

Supposons construit un carré de côté X et de surface S vérifiant :

$$S = 5.X$$

comme $S = X.X,$

on a donc nécessairement : $X = 5$.

Or, bien qu'al-Khayyām prenne $a = 5$, la démarche est manifestement générale. On verra par la suite qu'al-Khayyām procède par des équivalences telles que :

$$(X^2 = aX) \iff (X = a) \; ; (X > 0 \, , a > 0)$$

et on se ramène donc à E–1.

E - 5. $X^3 = aX$

Al-Khayyām affirme d'abord qu'elle est équivalente, dans le domaine numérique, à : $X^2 = a$. Par exemple : $X^3 = 4X$ est équivalente à $X^2 = 4$.

La raison indiquée est la proportionnalité expliquée au début de l'ouvrage :

$$\frac{X}{X^2} = \frac{X^2}{X^3} \quad \text{et} \quad \frac{1}{X^2} = \frac{X}{X^3}$$

Pour démontrer géométriquement le problème, al-Khayyām considère :

($ABCDE$) un cube de côté AB et tel que :

$$(ABCDE) = 4AB.$$

Soit (AC) la base (carrée) du cube. Alors:

$$(ABCDE) = (AC) \, . \, AB.$$

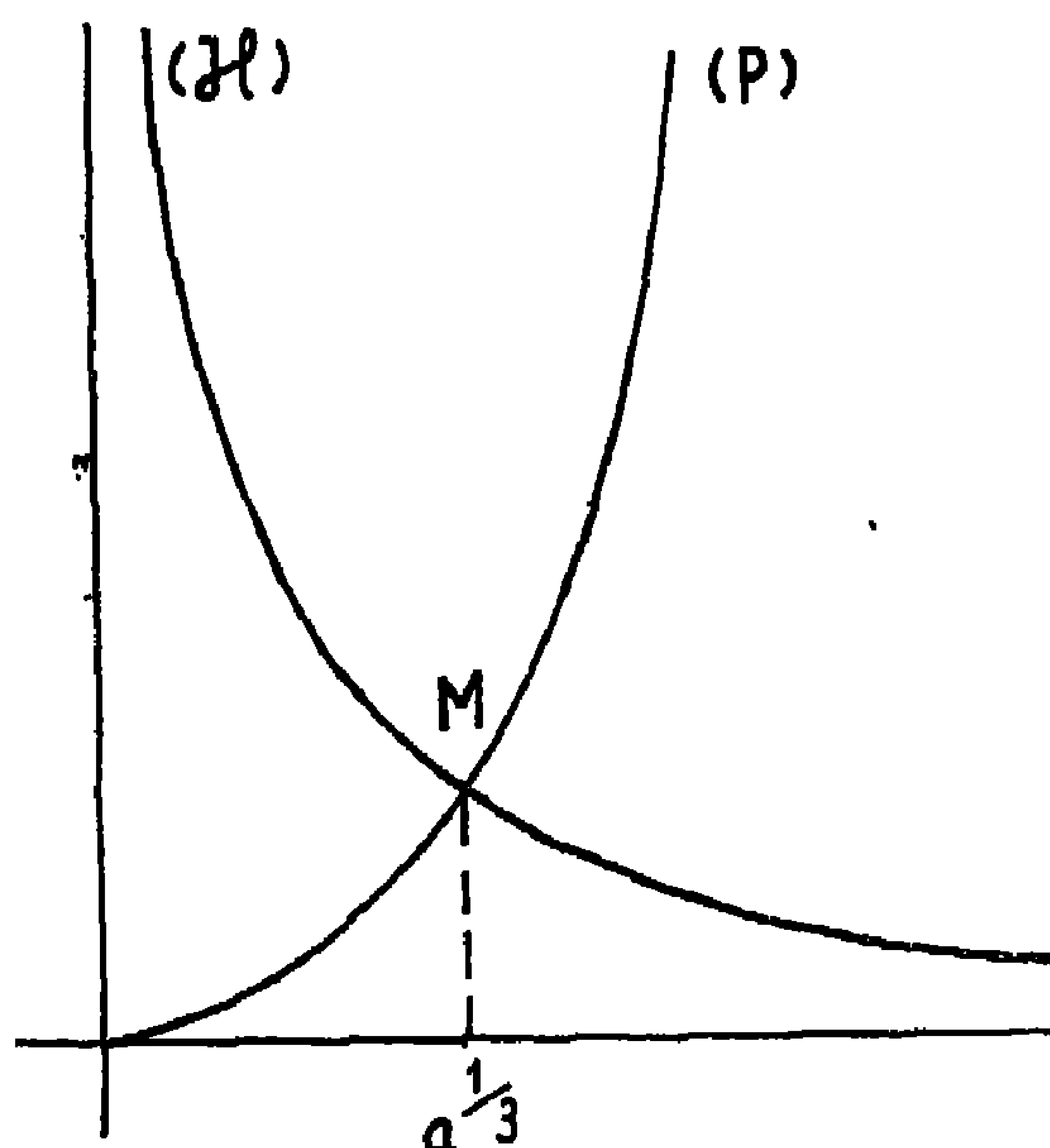
$$(P) = \{ (X,Y) \; ; (a^{1/3}) \; Y = X^2 \}$$
$$(H) = \{ (X,Y) \; ; XY = a^{2/3} \}$$

(voir figure) car pour $M(X_o, Y_o) \in (P) \cap (H)$ (qui existe), on a :

$$\frac{X_o}{Y_o} = \frac{a^{1/3}}{X_o} \qquad (M \in (P))$$

et :
$$\frac{Y_o}{a^{1/3}} = \frac{a^{1/3}}{X_o} \qquad (M \in (H))$$

donc
$$\frac{a^{2/3}}{X_o^2} = \frac{X_o}{a^{1/3}} \Rightarrow X^3_o = a$$



Mais cette démarche suppose que l'on a résolu – au préalable – l'équation numérique : $X^3 = a$. Ce qu'al-Khayyām savait faire.

Tout indique donc qu'al-Khayyām entendait volontairement séparer les deux solutions et voulait traiter chacune à part. Cette position semble renvoyer à la fois à son idée de la démonstration algébrique et de l'algèbre elle-même.

E - 4. $X^2 = aX$

En fait l'énoncé d'al-Khayyām n'est pas aussi général. Il reprend l'équation même d'al-Khawārizmī :

$$X^2 = 5X .$$

Démonstration: (figure ci-dessous)

Soit $(P_1) = \{ (X,Y) \; ; \; \beta Y = X^2 \}$

$(P_2) = \{ (X,Y) \; ; \; \alpha X = Y^2 \}$

Alors (P_1) et (P_2) se coupent.

Soit $M(X_0, Y_0) \in (P_1) \cap (P_2)$; et $(X_0, Y_0) \neq (0,0)$.

Alors: $M \in (P_1) \Rightarrow \beta Y_0 = X^2{}_0 \Rightarrow \frac{X_0}{\beta} = \frac{Y_0}{X_0}$

et $M \in (P_2) \Rightarrow \alpha X_0 = Y^2{}_0 \Rightarrow \frac{\alpha}{Y_0} = \frac{Y_0}{X_0}$

d'où $\frac{\alpha}{Y_0} = \frac{Y_0}{X_0} = \frac{X_0}{\beta}$

donc $\lambda = Y_0$ et $\gamma = X_0$

Pour montrer ensuite l'existence de la solution géométrique, al-Khayyām construit un cube (A) de côté X égal au parallélépipède donné (B) :

$$(B) = a.s \qquad (s = l.l)$$

Prenons: $\alpha = 1$; $\beta = a$. D'après le lemme, il existe λ et γ tels que:

$$\frac{1}{\lambda} = \frac{\lambda}{\gamma} = \frac{\gamma}{a} \qquad (1)$$

Alors $X = \lambda$. En effet:

$$(A) = X^3 \text{ et } \frac{1}{X^2} = \frac{X}{a} \qquad \text{d'après (1).}$$

Si on examine le lemme, on constate qu'il suppose intuitivement la continuité des graphes des deux paraboles et le fait que les branches de ces paraboles tendent vers l'infini selon deux directions orthogonales, en partant d'un même point B. Au cours de l'ensemble de la démonstration d'al-Khayyām, on ne manquera pas de noter une certaine indépendance entre les deux preuves, numérique et géométrique. Avec les moyens utilisés, al-Khayyām pouvait en effet obtenir la solution par intersection des deux courbes:

car D est sur (BDG). Donc:

$$\frac{BI}{BH} = \frac{BH}{BA}$$

d'où $$\frac{BA}{BH} = \frac{BH}{BI} = \frac{BI}{BC}$$ C.Q.F.D.

Après la démonstration du lemme, revenons à la proposition et posons:

$AB = BD = 1$ (voir figure E—3;2).

Soit $BC \perp (AD)$ au point B et tel que $BC = a$, d'après la proposition XI–12 des *Eléments*. Complétons le solide $(ABCDEGH)$. Alors:

$$(ABCDEGH) = a.$$

Soit E et G deux segments tels que :

$$\frac{AB}{E} = \frac{E}{G} = \frac{G}{BD}$$

C'est possible d'après le lemme.

Soit $HI = E$. Construisons le cube $(IHKL)$. Alors:

$$(IHKL) = (ABCDEGH).$$

En effet:

$$\frac{(AC)}{(IK)} = \frac{\overline{AB}^2}{\overline{HK}^2} = \frac{AB}{G} = \frac{HK}{BD}$$

Donc les deux solides sont égaux.

Remarques:

La preuve numérique d'al-Khayyām, comme on vient de le voir, revient à:

$$X^3 = a \Rightarrow X = a^{1/3}$$

La preuve géométrique utilise le lemme suivant:

Soit α et β donnés, il existe λ et γ tels que:

$$\frac{\alpha}{\lambda} = \frac{\lambda}{\gamma} = \frac{\gamma}{\beta}$$

(2) Pour al-Khayyām, l'équation $X^2 = a$ résout deux problèmes : Le premier, numérique : Trouver un nombre dont le carré est égal à un nombre donné. Le deuxième, géométrique : Trouver un carré dont la surface est égale à celle d'un rectangle donné.

E - 3. $X^3 = a$

La solution numérique s'obtient à l'aide de la méthode générale de l'extraction de la racine *n*ième, c'est-à-dire la résolution de l'équation numérique :

$$X^n - q = 0 \; ; n \geqslant 2.$$

Si a est un nombre, alors X^3 est connu et on extrait X.
Avant de donner la solution géométrique, al-Khayyām se réfère à un lemme qu'il démontre plus loin et que nous allons donner ici pour la clarté de l'exposé.

Lemme:

Trouver quatre grandeurs en proportion continue – deux étant données –. Voici la démonstration d'al-Khayyām :

Soit $AB \perp BC$ donnés ; (voir figure *L*–1) *

Soit (BDE) la parabole de sommet B, d'axe BC, de côté droit BC. Alors (BDE) est de position connue. Elle est tangente à AB en B (Proposition 32 – Livre I des *Coniques* d'Apollonius).
Soit (BDG) la parabole de sommet B, d'axe AB, de côté droit AB (Proposition 52 – Livre I des *Coniques*). (BDG) est tangente à BC en B.
Alors (BDE) et (BDG) se coupent nécessairement en un autre point. Soit D ce point. D est de position connue. Soient I et H les projections de D sur AB et BC respectivement. Alors :

$$\overline{HD}^2 = BH.BC \text{ (équation de } (BDE)\text{)}$$

car D est sur (BDE). Donc :

$$\frac{BC}{HD} = \frac{BC}{BI} = \frac{HD}{BH} = \frac{BI}{BH}$$

D'autre part :

$$\overline{DI}^2 = \overline{BH}^2 = BA.BI \text{ (équation de } (BDG)\text{)}$$

* Voir p. 31

(2) Cette équation résout aussi le problème géométrique suivant: construire un rectangle dont on connaît la surface et un côté.

E - 2. $X^2 = a$

La solution numérique s'obtient par l'extraction de la racine de a :

$$X^2 = a \Rightarrow X = \sqrt{a}$$

La démonstration géométrique: (figure E-2)*,

Soit $AB = a \,.\, l$ (l = unité-longueur),

et $(AD) = (a.l) \,.\, l$,

soit $(E) = (AD)$, un carré de côté $(\sqrt{a.l})$,

alors $X = \sqrt{a.l}$.

Remarque:

Dans la solution numérique, al-Khayyām note que X^2 est connu puisque a l'est. La racine est donc connue par la connaissance préalable "de la suite des carrés".

Dans la démonstration géométrique, al-Khayyām pose $AB = a$ un segment donné.

Soit maintenant $AC = 1$ et $AC \perp AB$

Complétons le rectangle (AD), alors:

$$(AD) = \text{aire } a.$$

a est le nombre qui mesure l'aire de (AD) – voir les définitions préliminaires.

Construisons un carré (E) tel que :

$$(E) = (AD),$$

ce qui est possible d'après la proposition 14, Livre II des *Eléments*. Alors son côté sera connu.

On voit donc que:

(1) L'existence de la solution géométrique équivaut, ici, à la constructibilité d'un carré de surface donnée. Ce qui est assuré par la proposition 14 du Livre II des *Eléments*.

---

* Les figures indiquées se trouvent dans la traduction des textes d'al-Khayyām.

Solution non constructible:

Il s'agit de E–3 qui a été résolue par les sections coniques.

II. *Les équations composées*:

1) Les équations trinômes:

Solutions constructibles:

a) Celles résolues (géométriquement) par les algébristes:

E–7, E–8, E–9

b) Celles qui se ramènent au groupe précédent:

E–10, E–11, E–12

(E–10 se déduit de E–7, E–11 de E–8 et E–12 de E–9).

Solutions non constructibles:

Elles sont toutes résolues par les sections coniques. Il s'agit de:

E–13, E–14, E–15, E–16, E–17, E–18.

2) Les équations quadrinômes:

Elles sont toutes résolues par les sections coniques.

a) Celles où trois degrés égalent un degré:

E–19, E–20, E–21, E–22.

b) Celles où deux degrés égalent deux degrés:

E–23, E–24, E–25.

E - 1. $$X = a$$

La racine est nécessairement connue. Il en va de même pour le nombre comme pour les grandeurs géométriques.

Remarques:

(1) L'idée d'al-Khayyām est la suivante: a mesure la donnée du second membre dans l'espace auquel elle appartient:

Si a est un nombre, on cherche un nombre X tel que : $X = a$.

Si a est une surface, on cherche X, un segment tel que:

$$X \cdot l = \text{aire } a \, (l, \text{ unité-longueur})$$

La solution vaut donc a qui est un nombre ou une surface selon la nature de l'inconnue, nombre ou grandeur géométrique.

E–1, E–2, E–4, E–5, E–6, E–7, E–8, E–9, E–10, E–11, E–12.

L'existence des solutions est démontrée à l'aide des propositions des *Eléments* et des *Données* d'Euclide.

II. Les équations résolues à l'aide des propriétés de certaines sections coniques, paraboles, hyperboles et cercles:

E–3, E–13, E–14, E–15, E–16, E–17, E–18,

E–19, E–20, E–21, E–22, E–23, E–24, E–25.

L'existence des solutions est démontrée à l'aide de certaines propositions des Livres I et II des *Coniques* d'Apollonius.

Remarque:

Cette classification est de nature géométrique. Elle repose sur l'idée de constructibilité de la, ou des solutions de l'équation considérée.

(2) Seconde classification:

Elle est définie à partir du polynôme associé à chaque équation – le nombre de ses termes et son degré –.

Comme al-Khayyām savait que dans le cas général la solution d' une équation cubique n'est pas constructible à l'aide de la règle et du compas, il s'ensuit que cette seconde classification coïncide avec la première, à l'exception des équations cubiques réductibles aux équations de degré $\leqslant 2$.

I. *Les équations simples*:

Ce sont celles qui contiennent deux monômes.

Solutions constructibles:

1) Celles mentionnées par les algébristes:

E–1, E–2, E–4.

2) Celles qui se ramènent au premier groupe par les relations:

$$\frac{X}{X^2} = \frac{X^2}{X^3} \text{ et } \frac{1}{X^2} = \frac{X}{X^3}$$

Il s'agit des équations:

E–5, E–6

(E–5 se déduisant de E–4 et E–6 de E–2).

Définitions

(1) *L'inconnue et ses puissances successives*:

Al-Khayyām définit d'abord l'inconnue que l'on notera X et ses puissances successives en montrant qu'elles vérifient:

$$\frac{aX^n}{bX^{n+1}} = \frac{aX^{n-1}}{bX^n} = \ldots = \frac{a}{bX}$$

(2) *Le nombre "plan"*:
Soit l un segment, unité de mesure; soit a un nombre et (E) un rectangle.
Alors

$$(E) = a$$

signifie que a mesure un rectangle dont l'un des côtés est un segment de longueur a et l'autre, un segment de longueur l.

(3) *Le nombre "solide"*:

Soit a un nombre et (E) un parallélépipède. Alors:

$$(E) = a$$

signifie que a mesure un parallélépipède ayant pour base le carré de l'unité longueur l et pour hauteur le segment de longueur a.

Remarque:

Al-Khayyām utilise également la notion de "nombre absolu".

Etant donné les exemples qu'il traite, on pourrait croire que chez lui le nombre absolu désigne les entiers; mais cette interprétation serait trop restrictive, étant donné, d'une part, que ses prédécesseurs algébristes utilisaient aussi bien les entiers, les rationnels que les irrationnels algébriques, et d'autre part qu'al-Khayyām lui-même a donné une interprétation arithmétique du Livre X des *Eléments* d'Euclide.

Classification

(1) Première classification:

Elle est définie à partir des méthodes de résolution des équations:

I. Les équations résolues à l'aide des propriétés du cercle et de la droite.

COMMENTAIRE MATHÉMATIQUE

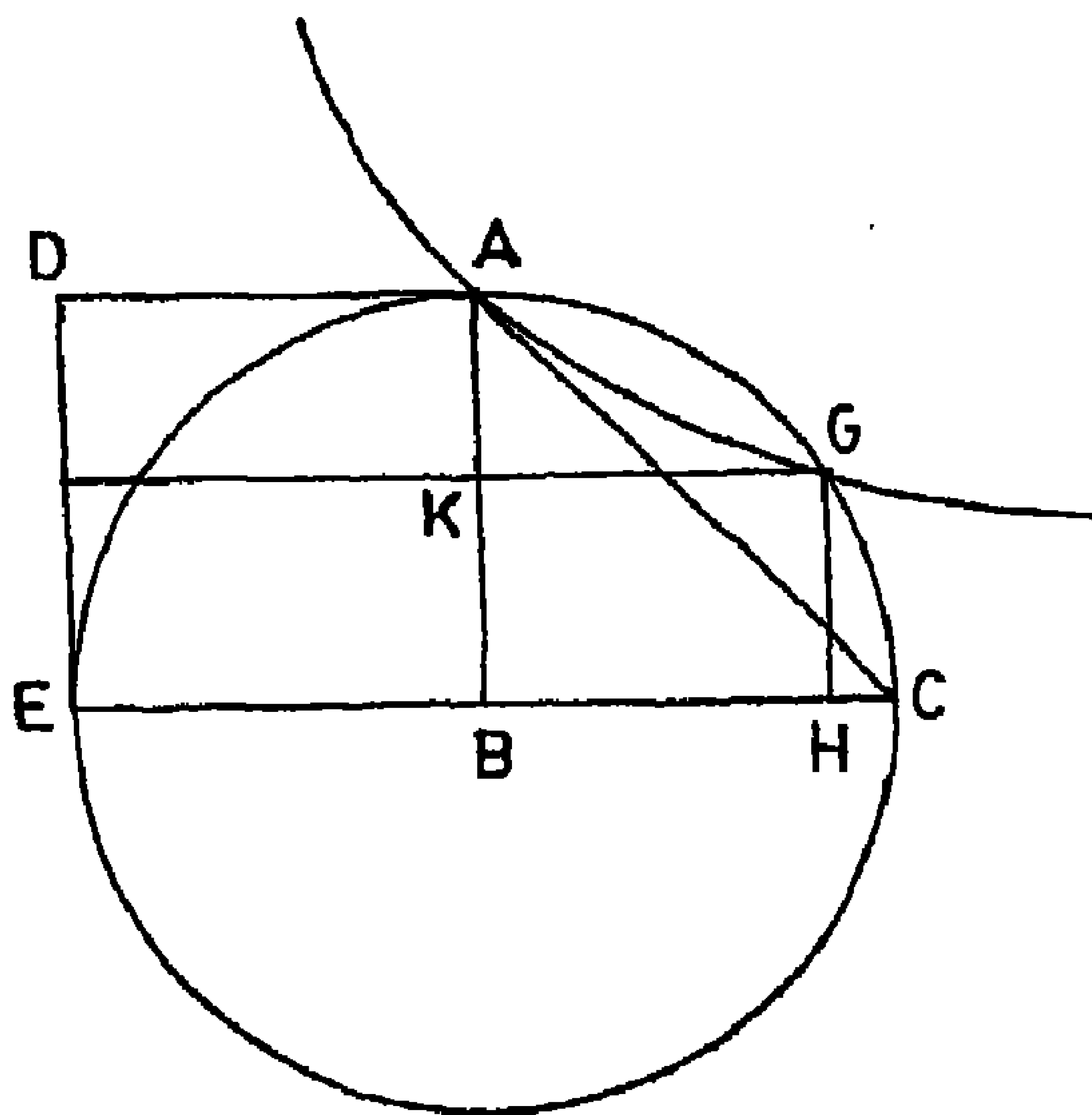
Problème[1]

Etant donné le quart *AC* d'un cercle de centre B, on veut diviser AB en deux parties, comme tu le sais.

Construisons sur *AB* un carré, soit *AE*. Les deux droites *BE* et *ED* sont de position connue. Construisons l'hyperbole passant par le point *A*, et qui ne rencontre aucune des droites *BE* et *ED*. Soit la section *AG*. Elle est donc de position connue. Joignons *AC*. Elle est nécessairement tangente à la section, et elle est à l'intérieur du cercle. Il s'ensuit nécessairement que l'hyperbole coupe le cercle ;qu'elle le coupe au point *G*; il est de position connue. Menons les deux perpendiculaires *GH* et *GK*. Je dis que la construction est achevée.

Démonstration: les deux points *A* et *G* sont sur le périmètre de la section. On a mené de chacun d'eux deux droites vers les deux droites qui ne rencontrent pas la section, et parallèles à celles-ci. La surface *GE* est donc égale à la surface *AE*. Retranchons *KE* qui leur est commune; il reste *KH*, égale à *KD*. Ces deux surfaces sont d'angles égaux. Leurs côtés sont donc inversement proportionnels. Le rapport de *AD* à *KG* est égal au rapport de la droite *BK* à *KA*.

Achevé.



1. Ce problème suit, dans le manuscrit, le texte d'al-Khayyām, sans être attribué ni à celui-ci, ni à quiconque. Mais comme il se rapporte à la première analyse, non achevée par al-Khayyām, et comme il figure dans le manuscrit, nous l'éditons, sous toutes réserves quant à l'identité de son auteur.

que le rapport de *AE*, qui est le demi-diamètre, à *GH*, soit égal au rapport de *EH* à *HB*. Ce qu'il fallait démontrer.

Celui qui veut connaître ceci par l'arithmétique (*ḥisāb*) ne dispose d'aucun chemin pour y parvenir s'il exige de l'exactitude; en effet, dans les choses qui peuvent être déterminées par les sections coniques, il est impossible qu'en analysant on parvienne à l'arithmétique; mais si l'on se contente d'approximations, que l'on s'en remette à l'une des tables des cordes de l'ouvrage de l'*Almageste*, ou aux tables des sinus et des sinus verse[1] d'un *Zīj* digne de confiance, où on cherchera un arc tel que le rapport de soixante – qui est la moitié du diamètre du cercle par hypothèse – à son sinus, soit égal au rapport de son cosinus à sa flèche. Nous trouvons que cet arc est très proche de cinquante-sept degrés, suivant les parties par lesquelles le cercle est trois cent soixante degrés. Son sinus est très proche de cinquante parties, sa flèche est très proche de vingt-sept parties plus un tiers, et son cosinus est très proche de trente-deux parties plus deux tiers. On peut aller plus loin dans la précision, jusqu'à ce que la différence s'amenuise au point de devenir insensible.

Voici ce qui s'est présenté à moi sur ce sujet, en dépit de la dispersion de ma pensée, de la dissipation de mon esprit et de l'attrait des occupations qui détournent de semblables objets particuliers.
6v N'eût-été l'honneur de la compagnie / – que cet honneur se perpétue –, et le droit de celui qui a posé la question – que Dieu lui perpétue son soutien –, je serais resté bien loin de tout cela, car mon assiduité se borne à ce qui, pour moi, est plus important, et à quoi je consacre toute ma diligence.

C'est Dieu Très-Haut qu'en tous cas on loue et remercie, et dont on espère qu'il nous guide avec bonheur dans la quête des biens.

Il est le Seigneur de l'exaucement.

Le traité a été achevé. La bénédiction soit sur celui qui a scellé le Message.

1. litt. : flèche.

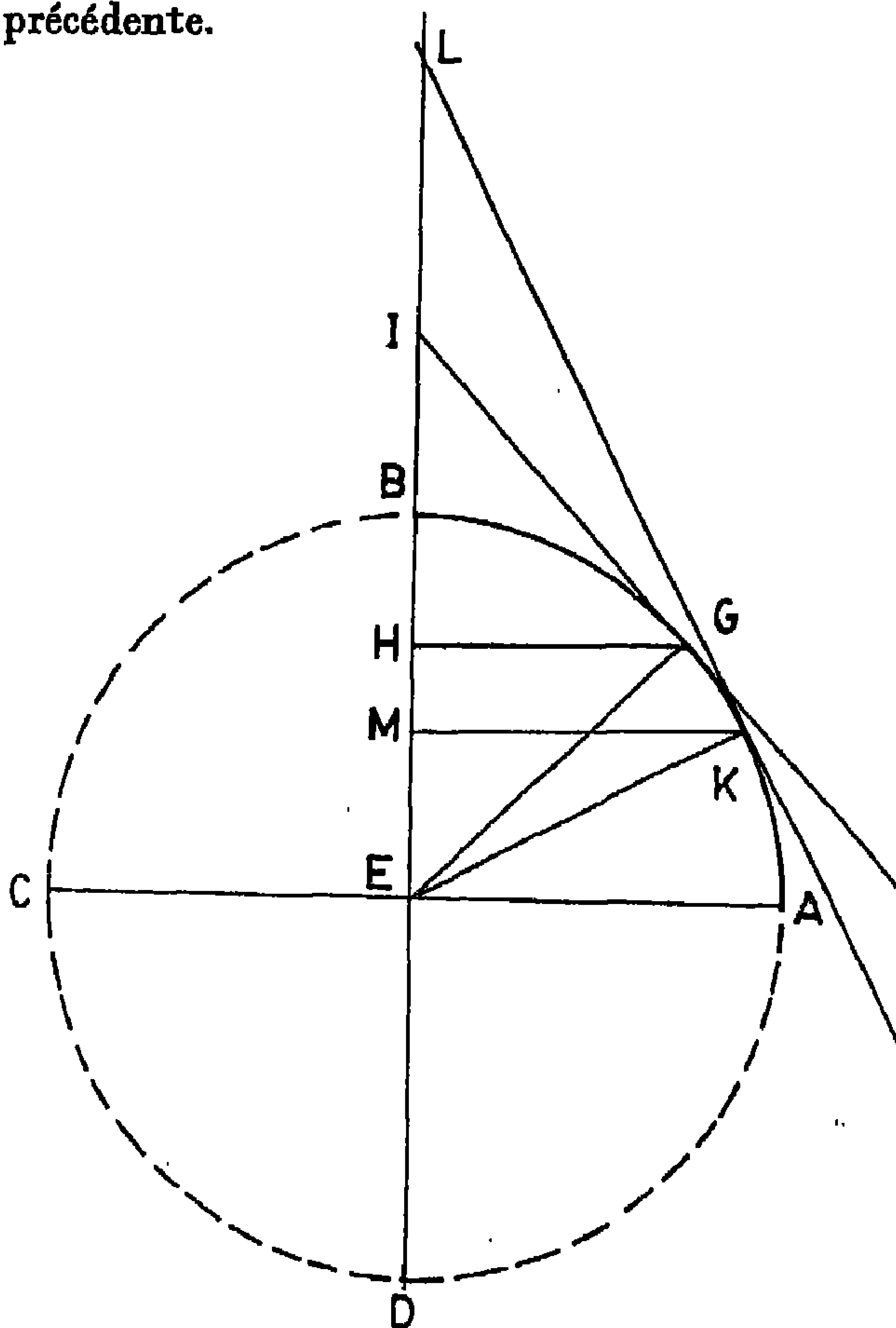
Démonstration: l'angle GEH est égal à l'angle BAC. Supposons qu'il n'en soit pas ainsi. L'un des deux sera plus grand. Soit BAC. Contruisons au point E de la droite EB un angle égal à l'angle
6r BAC. Soit KEL. / Menons du point K la tangente au cercle, soit KL, qui coupe EI au point L. Le triangle EKL est donc semblable au triangle ABC, car leurs angles sont égaux. Menons du point K la perpendiculaire KM sur EB. EK et KM ensemble sont égales à la droite EL. Mais EB est égale à EK. Donc BL est égale à KM, et le rapport de LM à KM est égal au rapport de CD à DB. Le rapport de ML à LB est donc égal au rapport de DC à CE. Par séparation, le rapport de MB à BL est égal au rapport de DE à EC, et le rapport de EC, qui est égale à DB, à DA, est égal au rapport de BL, qui est égale à KM, à ME. Selon le rapport d'égalité, le rapport de EM à MB est donc égal au rapport de AD à DE. Mais nous avons fait le rapport de EH à HB égal au rapport de AD à DE. Le rapport de EM à MB est donc égal au rapport de EH à HB. Mais EM, la première, est plus petite que EH, la troisième. Il s'ensuit nécessairement que MB, la deuxième, est plus petite que HB, la quatrième, comme c'est montré dans le Vème Livre des *Eléments*, dans la proposition 14. Or elle est plus grande. Ce qui est impossible. L'angle GEH n'est donc ni plus petit que l'angle BAC du triangle ABC précédent, ni plus grand. Le triangle GEH est donc semblable au triangle ABC précédent. EG et GH ensemble sont donc égales à EI, BI est donc égale à GH, et le produit de DH par HB est égal au carré de HG. De même le produit de EH par HI est égal au carré de HG. Le produit de DH par HB est donc égal au produit de EH par HI. Ces quatre droites sont donc en proportion, comme c'est montré dans la proposition 16 du Livre IV.[1] Le rapport de DH, la première, à HE, la seconde, est donc égal au rapport de HI, la troisième, à HB, la quatrième. Par séparation, le rapport de DE à EH est donc égal au rapport de BI à BH. Mais DE est égale à AE, et BI est égale à GH. Le rapport de AE à EH est donc égal au rapport de GH à HB. En inversant les moyens, le rapport de AE à GH est égal au rapport de EH à HB.

Nous avons donc divisé le quart de cercle en deux parties en un point G, et nous avons mené de ce point la perpendiculaire GH, telle

---

1. Il s'agit d'une mauvaise transcription du copiste, car Khayyām cite à cette occasion le Livre II.

Retraçons le quart de cercle *AB*, du cercle *ABCD*, et menons dans le cercle les deux diamètres *AC* et *BD*, qui se coupent suivant des angles droits; le centre du cercle est le point *E*. Séparons de la droite *CD* – du triangle *ABC* de la figure précédente – la droite *CE* égale à la perpendiculaire *BD*. Divisons au point *H* la moitié du diamètre du cercle, qui est la droite *EB* de cette figure, suivant le rapport de *AD* à *DE*, du triangle précédent *ABC*, comme l'a montré Euclide dans la proposition 5 du Livre VI.[1] Menons la perpendiculaire *HG*, et joignons *EG*. Menons du point *G* la tangente au cercle, soit la droite GI. Prolongeons EB jusqu'à ce qu'elle coupe la droite *GI* au point *I*. Le triangle *EGI* est alors semblable au triangle *ABC* de la figure précédente.

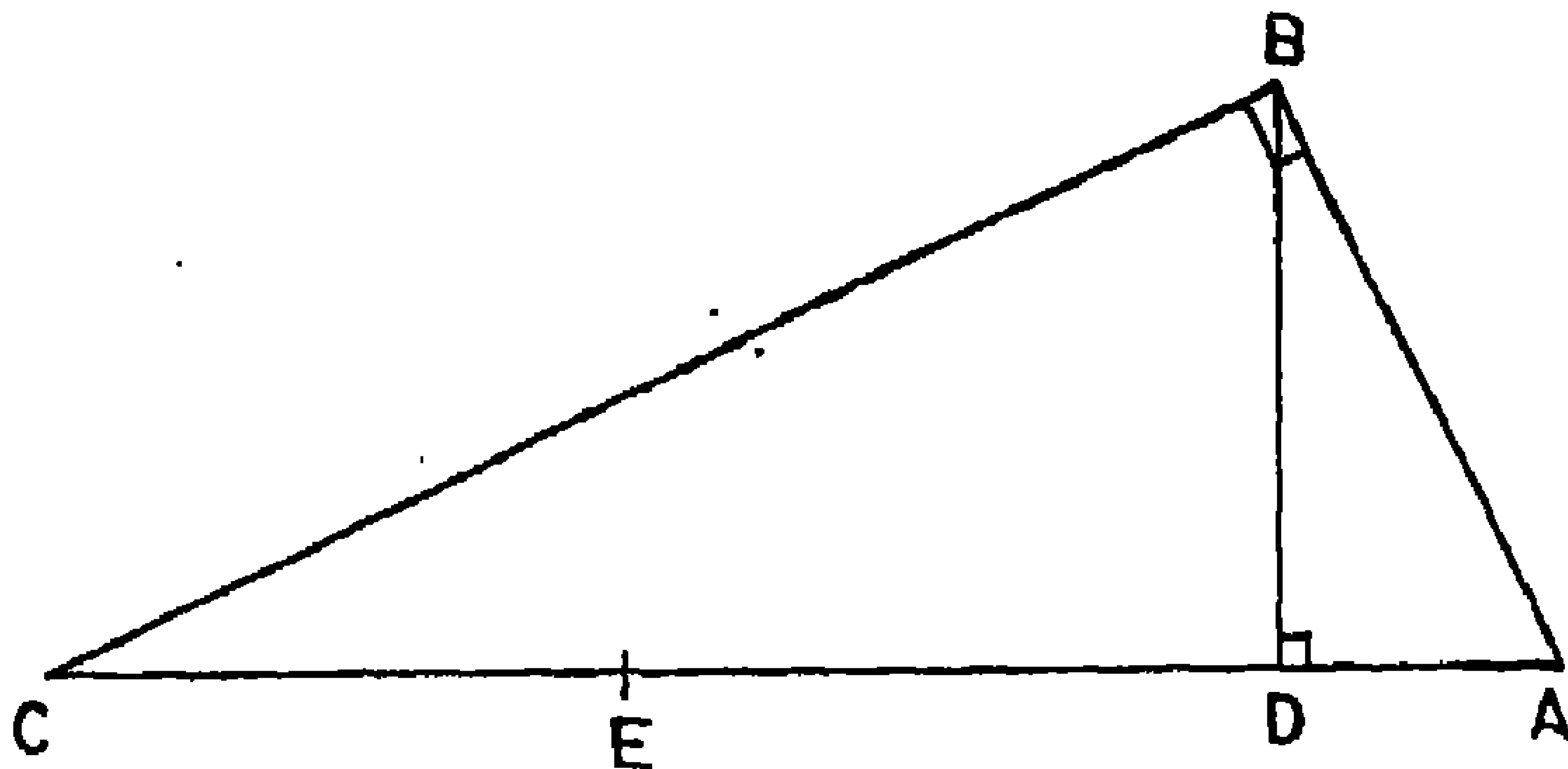


1. Il s'agit de la quatrième proposition du même livre. Ici encore l'erreur est due au copiste, étant donné l'ordre dans lequel al-Khayyām donne précédemment les propositions d'Euclide.

sont donc égaux à deux cents fois le côté du cube. Ajoutons communément aux deux le cube de AL, qui est le produit du carré de AL par AL. Le cube de AL plus deux cents fois le côté du cube sont donc égaux à deux mille en nombre plus le produit du carré de AL par AL, plus le produit du carré de AL par LB. Mais le produit du carré de AL par AL plus le produit du carré de AL par LB sont égaux au produit du carré de AL par AB ; et AB, comme nous l'avons supposé, est vingt. Le produit du carré de AL par AB est donc vingt fois le carré de AL. Le cube de AL plus deux cents fois la droite AL sont donc égaux à deux mille en nombre plus vingt fois le carré du côté du cube. Ce qu'il fallait démontrer.

Ceci étant introduit, élevons ensuite le triangle ABC, et posons AD rationnelle, soit dix. DB sera donc égale à la droite AL, dont nous avons montré qu'elle est de grandeur connue. En disant "de grandeur connue", je n'entends pas qu'elle est de quantité connue. Il y a entre ces deux<notions>une différence. En disant "de grandeur connue", j'entends certes ce qu'Euclide a entendu dans son livre des *Données*, c'est-à-dire telle qu'on puisse trouver une autre grandeur qui lui soit égale.

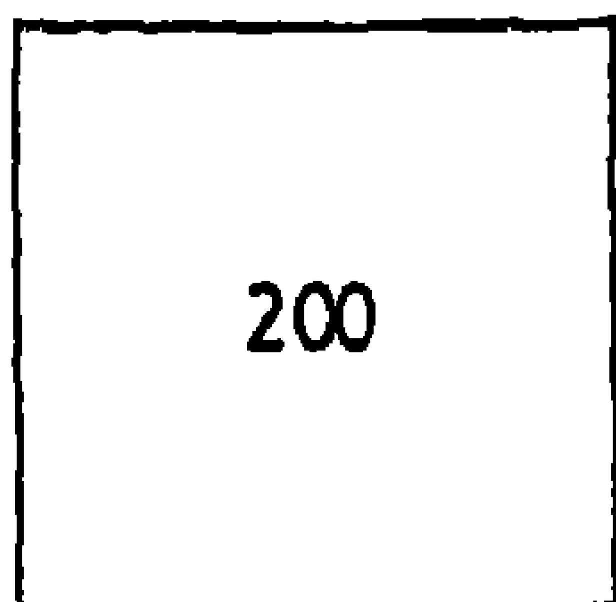
Par synthèse, posons la droite AD égale à dix, et posons DB perpendiculaire à la droite AD et égale à la droite AL de la précédente figure. Joignons AB. Elevons au point B la perpendiculaire BC, et prolongeons AD jusqu'à ce qu'elle coupe la perpendiculaire au point C. Le triangle ABC est nécessairement rectangle – je veux dire que l'angle B est droit –; la droite AB plus la perpendiculaire BD sont égales à l'hypoténuse AC, et la droite AB plus la droite AD sont égales à la droite BC. Ce qu'il fallait démontrer.

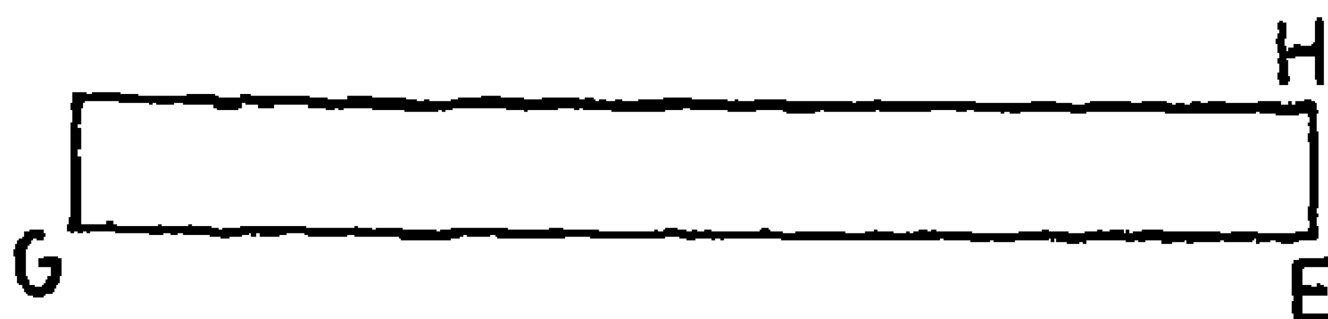


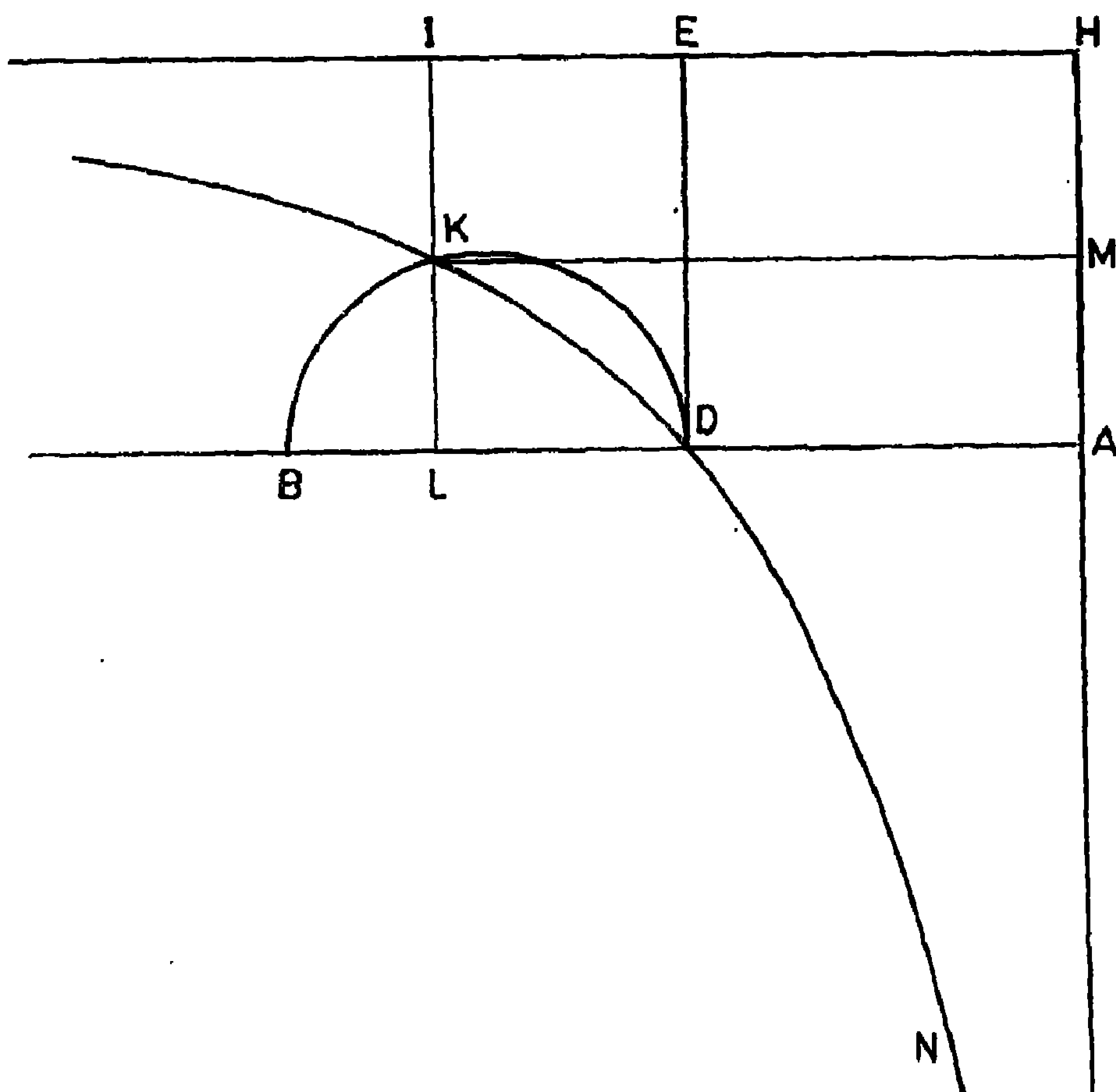
égal au rectangle KH, car les deux points K et D sont sur le périmètre de l'hyperbole qui ne rencontre aucune des deux droites AH et HI. Or on a mené de chacun d'eux deux droites, respectivement parallèles à leurs homologues menées de l'autre point, sur les deux droites qui ne rencontrent pas l'hyperbole. L'éminent Apollonius a démontré cela dans la proposition 3 du Livre II de son ouvrage des *Coniques.*[1] Le cercle DKB est de position connue, car son diamètre, qui est DB, est de position et de grandeur connues. Les deux droites AH et HI sont de position connue. Et le point N est de position connue. La section NDK est donc de position connue. Or le cercle DKB est de position connue. Le point K est donc de position connue, et la droite KL est de position connue. Le point L est donc de position connue. Or le point A est de position connue. La droite AL est donc de grandeur connue. Ce sont là des choses évidentes, du livre des *Données*. Or nous avons montré que le rectangle AE est égal au rectangle KH. Otons EM qui leur est commun. Il reste le rectangle DM, égal au rectangle KE. Ajoutons le rectangle DK communément aux deux. Le rectangle AK est donc égal au rectangle DI. Leurs angles sont égaux, car ils sont droits. Leurs côtés sont donc inversement proportionnels, comme l'a montré Euclide dans la proposition 14 du Livre VI. Le rapport de AL à LI est égal au rapport de DL à LK. Leurs carrés sont également proportionnels, donc le rapport du carré de AL au carré de LI est égal au rapport du carré de DL au carré de LK. Or le rapport de DL à LK est égal au rapport de LK à LB. Le rapport du carré de DL au carré de LK est donc égal au rapport de DL à LB. Il s'ensuit nécessairement que le rapport du carré de AL au carré de LI est égal au rapport de DL à LB. Le produit du carré de AL par la droite LB est donc égal au produit du carré de LI par la droite DL. Ajoutons communément aux deux le produit du carré de LI par AD. Le produit du carré de LI par AL est donc égal au produit du carré de LI par AD plus le produit du carré de AL par LB. Mais le carré de LI est égal au nombre des côtés, c'est-
5v à-dire deux cents, et AL est le côté du cube. Deux cents fois le côté / du cube sont donc égales au produit du carré de LI par AD plus le produit du carré de AL par LB. Mais le produit du carré de LI par AD est égal au nombre, comme nous l'avons introduit, qui est deux mille. Deux mille en nombre plus le produit du carré de AL par LB

1. Il s'agit de la proposition 12 du même livre. L'auteur cite à cette occasion la proposition 8. Le 3 qui figure dans le texte est sûrement une erreur du copiste.

Je dis que le côté AL est la racine d'un cube tel que, si on lui ajoute deux cents fois son côté, il soit égal à vingt fois le carré de AL plus deux mille en nombre.







Démonstration: prolongeons LK jusqu'à ce qu'elle coupe la droite HE au point I, et menons KM parallèle à AL. Puisque KI est parallèle à DE, et que KM est parallèle à AD, le rectangle AE est

nômes et une quadrinôme, des équations composées. La seule équation binôme, à savoir "le cube est égal à un nombre"[1], nos éminents prédécesseurs l'ont résolue.[2] Rien d'eux ne nous est parvenu à propos des dix <équations> qui restent, ni rien d'aussi détaillé. Si le temps nous laisse du répit, et si le succès m'accompagne, je consignerai ces quatorze espèces avec toutes leurs branches et sections, en distinguant les cas possibles des cas impossibles – certaines de ces espèces requièrent en effet des conditions pour être valides – dans un traité qui contiendra plusieurs lemmes les précédant, de grande utilité pour les principes de cet art.

Je cherche le refuge du concours divin, me remettant à Dieu, Lui qui nous assiste en toutes choses. C'est de Lui que viennent la force et la puissance. Illustre soit Sa Grandeur.

Revenons à notre problème ci-dessus, après nous être étendu sur ces préliminaires. Notre problème est : chercher un cube tel que joint à deux cents < fois > son côté, il soit égal à vingt fois le carré de son côté, plus deux mille en nombre.

Posons la droite AB égale au nombre des carrés, qui sont vingt ; la droite EG deux cents ; et la droite EH un. Le rectangle HG est deux cents. Faisons un carré égal à HG, comme c'est montré dans la proposition 14 du Livre II.[3] Soit le côté de ce carré égal à AH, et AH perpendiculaire à AB ; c'est la racine de deux cents. AD est le quotient du nombre par le nombre des racines ; il est égal à dix, puisque
5r le nombre est deux mille / et que le nombre des racines est deux cents, et que si on divise deux mille par deux cents on obtient dix. DB est également dix. Construisons sur DB le demi cercle DKB. Menons DE parallèle à AH, complétons le rectangle AE ; construisons une hyperbole passant par le point D et qui ne rencontre aucune des droites AH et HE, comme l'a montré l'éminent Apollonius dans la proposition 59 du Premier Livre de son ouvrage des *Coniques*,[4] et dans les propositions 5 et 6 du deuxième livre de cet ouvrage (la construction ne peut en effet être achevée que par ces trois propositions). Que cette hyperbole soit NDK. Elle coupe le cercle au point K. Menons du point K la perpendiculaire KL sur AB.

---

1. Litt. : nombres.
2. Il s'agit en effet du problème de quatre grandeurs en proprotion continue.
3. Des *Eléments*.
4. Il s'agit de I-55, II-4 et II-5, comme on l'a noté précédemment.

Archimède a dit: les deux droites AB et BC sont de grandeur connue, et dans le prolongement l'une de l'autre; et le rapport de BC à CE est connu. Donc CE est connue, comme c'est montré dans les *Données*. Il a dit ensuite: posons le rapport de CD à CE égal au rapport du carré de AB au carré de AD.

Il n'a pas dit comment connaître cela, puisqu'on a nécessairement besoin des sections coniques. Et, à part cela, il n'a rien introduit dans ce livre qui soit fondé sur les sections coniques. Il a également pris cela comme admis. La quatrième proposition concerne la division d'une sphère par un plan, selon un rapport donné. Mais Al-Māhānī utilisait les termes des algébristes afin de faciliter < la construction> ; comme l'analyse amenait à des nombres, des carrés et des
4v cubes en équation, et qu'il ne pouvait pas / la résoudre par les sections coniques, il trancha donc en disant que c'est impossible. La solution de l'une de ces espèces demeura donc cachée à cet homme éminent, en dépit de son éminence et de sa primauté en cet art, jusqu'à ce que parût Abū Jaʿfar al-Khāzin, et qu'il indiquât une méthode qu'il exposa dans un traité; et Abū Naṣr b. ʿIrāq, protégé du Prince des Croyants, et du pays de Khwārizm, résolvait le lemme qu'Archimède a pris pour déterminer le côté de l'heptagone dans le cercle, et qui est fondé sur le carré répondant à la propriété citée; il utilisait les termes des algébristes. L'analyse a mené à "un cube plus des carrés sont égaux à un nombre,"[1] qu'il a résolue par les sections.

Cet homme, par ma vie, est d'une excellente classe en mathématiques. Voici le problème devant lequel s'étaient trouvés impuissants Abū Sahl al-Qūhī, Abū al-Wafā' al-Būzjānī, Abū Ḥāmid al-Ṣaghānī, et un groupe de leurs confrères, qui tous étaient dévoués à Sa Seigneurie ʿAḍad al-Dawla, dans la Cité de la Paix[2]; ce problème, dis-je, est le suivant: Si tu divises dix en deux parties, la somme de leurs carrés plus le quotient du plus grand par le plus petit est soixante-douze. L'analyse a mené à des carrés égaux à un cube plus des racines plus un nombre.[3] Ces hommes éminents sont demeurés perplexes devant ce problème, durant un long moment, jusqu'à ce qu'Abū al-Jūd le résolût. Ils ont conservé < sa solution > dans la bibliothèque des rois Samanides. Ce sont donc trois espèces, deux tri-

1. Litt.: nombres.
2. Baghdad.
3. Litt.: nombres.

Des carrés plus des racines sont égaux à un cube, ce qui est équivalent à “des racines plus un nombre[1] sont égaux à un carré”.

Des carrés plus un nombre[1] sont égaux à un cube – qu’on ne peut résoudre que par les sections.

Des racines plus un nombre[1] sont égaux à un cube, qu’on ne peut résoudre que par les sections.

Il y a donc neuf espèces trinômes: trois sont résolues à l’aide du deuxième < Livre > des *Eléments*, et six ne peuvent être résolues que par les sections coniques.

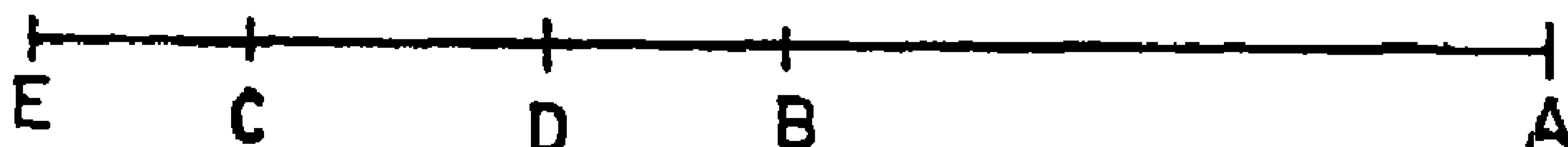
Les équations quadrinômes sont:

Un cube est égal à des carrés plus des racines plus un nombre.[1]
Un cube plus des racines plus un nombre[1] sont égaux à des carrés.
Un cube plus des carrés plus un nombre[1] sont égaux à des racines.
Un cube plus des carrés plus des racines sont égaux a un nombre.[1]
Un cube plus des carrés[2] sont égaux à des racines plus un nombre.[1]
Un cube plus des racines sont égaux à des carrés plus un nombre.[1]
Un cube plus un nombre[1] sont égaux à des carrés plus des racines.

Ce sont là les sept espèces quadrinômes, dont aucune ne peut être résolue, sinon par les sections coniques. De ces < équations > composées, il résulte treize formes qui ne sont résolues que par les sections du cône, et une forme de binôme, qui n’est résolue que par les sections du cône, à savoir un cube est égal à un nombre.[1]

Quant aux anciens mathématiciens, qui ne parlaient pas notre langue, ils n’ont attiré l’attention sur rien de tout cela, ou bien rien ne nous en est parvenu ni n’a été traduit en notre langue.

Et parmi les modernes, qui parlent notre langue, le premier qui eut besoin d’une espèce trinôme de ces quatorze espèces est Al-Māhānī le géomètre. Il résolut le lemme qu’Archimède a pris, le considérant comme admis, dans la proposition 4 du deuxième livre de son ouvrage sur *La sphère et le cylindre*. C’est ce que je vais exposer.



1. Litt.: nombres.
2. Litt.: carré.

Reprenons là où nous étions.

Nous disons: les trois premiers genres, c'est-à-dire le nombre, la racine et le carré, lorsqu'ils <entrent> en équation, reviennent à six branches: trois binômes et trois polynômes. On peut connaître leurs inconnues par le deuxième Livre, comme on le voit cité et commenté dans les livres des algébristes.

Mais si on considère le cube, et qu'on l'égale à ce qui reste, on a alors besoin des solides, et on a particulièrement besoin des coniques et de leurs sections, puisque le cube est un solide.

Les équations binômes sont au nombre de trois: un cube est égal à des carrés,[1] c'est-à-dire une racine[2] est égale à un nombre.[3]

Un cube est égal à des racines, c'est-à-dire un carré[1] est égal à un nombre.[3]

Un cube est égal à un nombre,[3] et il n'y a d'autre voie pour le découvrir que les voies numériques, préparées afin de déterminer le cube, ou bien les voies géométriques, par lesquelles on construit un parallélépipède, égal à un autre parallélépipède donné. On a néces-
4r sairement besoin des sections coniques / dans des constructions semblables, ou des instruments, pour qui ne connaît pas les coniques.

Quant aux équations polynômes, il y en a deux espèces, trinômes ou quadrinômes. Les trinômes: un cube plus des carrés sont égaux à un nombre[3] – qu'on ne peut résoudre que par les sections.

Un cube plus des carrés sont égaux à des racines, ce qui est équivalent à "un carré plus des racines sont égaux à un nombre[3]."

Un cube plus un nombre[3] sont égaux à des racines – qu'on ne peut résoudre que par les sections.

Un cube plus un nombre[3] sont égaux à des carrés – qu'on ne peut résoudre que par les sections.

Un cube plus des racines sont égaux à un nombre[3] – qu'on ne peut résoudre que par les sections.

Un cube plus des racines sont égaux à des carrés, ce qui est équivalent à "un carré plus un nombre sont égaux à des racines.[2]

1. Litt.: carré.
2. Litt.: racines.
3. Litt.: nombres.

et d'angles droits, dont le côté est la ligne droite qu'on a nommée du terme "chose".

Le cube est le solide limité par six surfaces carrées égales de côtés égaux et d'angles droits, dont le côté est la ligne droite qu'on a nommée du nom "chose"; l'une de ces surfaces carrées est le carré qui a été nommé du nom "carré" (*māl*). Il est donc obtenu du produit de la chose par elle-même, et du résultat par la chose. Euclide a montré comment le construire; il l'a démontré dans la proposition 17 du Livre XIII[1] de son ouvrage des *Eléments.*

Quant au carré-carré, qui est chez les algébristes le produit du carré par lui-même, il n'a aucune signification dans les grandeurs continues, puique, le carré étant une surface, comment peut-on le multiplier par lui-même ? La surface en effet a deux dimensions, et deux dimensions par deux dimensions font quatre dimensions; or le corps ne peut avoir plus de trois dimensions.

Toutes les choses qui relèvent de l'algèbre relèvent de ces quatre genres. Et ceux qui croient que l'algèbre est un artifice destiné à déterminer les nombres inconnus, croient l'impossible.

Tu ne dois donc pas avoir égard à ceux qui s'arrêtent aux apparences et sont d'opinions différentes.

Sans doute l'algèbre et l'al-muqābala sont-elles des choses géométriques, qui ont été démontrées dans le Livre II des *Eléments*, propositions 5 et 6.

Et celui qui dit: un carré-carré plus trois carrés sont égaux à vingt-huit en nombre, il a partagé en deux moitiés le nombre de carrés, il l'a multiplié par lui-même, l'a ajouté au nombre, et il a pris la racine du résultat, qui est cinq et demi, duquel il a retranché la moitié du nombre de carrés; il reste donc quatre, qui est le carré; et le carré-carré est seize. Il a cru ensuite avoir découvert le carré-carré par la voie de l'algèbre. Mais son opinion est très faible, car ce n'est pas le carré-carré qu'il a découvert, mais le carré; et c'est comme si on avait "un carré plus trois racines égaux à vingt-huit". Il a ensuite déterminé la racine par la deuxième réduction, puis il a postulé que le carré de cette racine est le carré-carré. C'est là un mystère qui t'en fera apercevoir d'autres.

---

1. Il s'agit de XIII, 15, *op. cit.*

Mais avant de nous engager dans la démonstration par les sections de ce que nous cherchons, nous allons proposer une notion qui incite le lecteur de ce traité à poursuivre <l'étude> des sciences et à perfectionner les domaines[1] que j'indiquerai. Et grâces soient rendues à Dieu Très Haut pour Ses Bienfaits envers certains de ses serviteurs, car parler de < ses > bienfaits est une grande grâce rendue au bienfaiteur; ainsi Il l'a révélé: "Du Bienfait de ton Seigneur, parle".

Et que le lecteur ne croie pas que c'est l'amour de la vantardise qui en cette occasion a suscité ces paroles, car il appartient aux habitudes des libertins, arrogants et suffisants; et la suffisance est le droit des gens bas, car leur âme n'est capable de saisir des sciences que quelque chose d'infime. Et une fois qu'ils l'ont saisi, ils croient que cette quantité englobe toutes les sciences et les réunit. Que Dieu nous garde de nous laisser séduire par des opinions qui nous égarent, et nous empêchent d'apercevoir les vérités et de gagner notre salut.

Je dis: ce que les algébristes nomment carré-carré est quelque chose de conçu dans les grandeurs continues, et qui n'existe en aucune manière dans les individus. Mais les termes carré-carré, carré-cube et cubo-cube, et ceux qui sont au-delà, sont dits des grandeurs continues, en tant que le nombre est dit de ces grandeurs si elles <deviennent > des pluralités.[2] Les grandeurs participent au genre de la quantité, comme a pris soin de le montrer l'auteur de la *Métaphysique*.[3]

Quant à celles qu'utilisent les algébristes, et qui existent dans les individus et dans les grandeurs continues, elles sont quatre: le nombre, la chose, le carré et le cube.

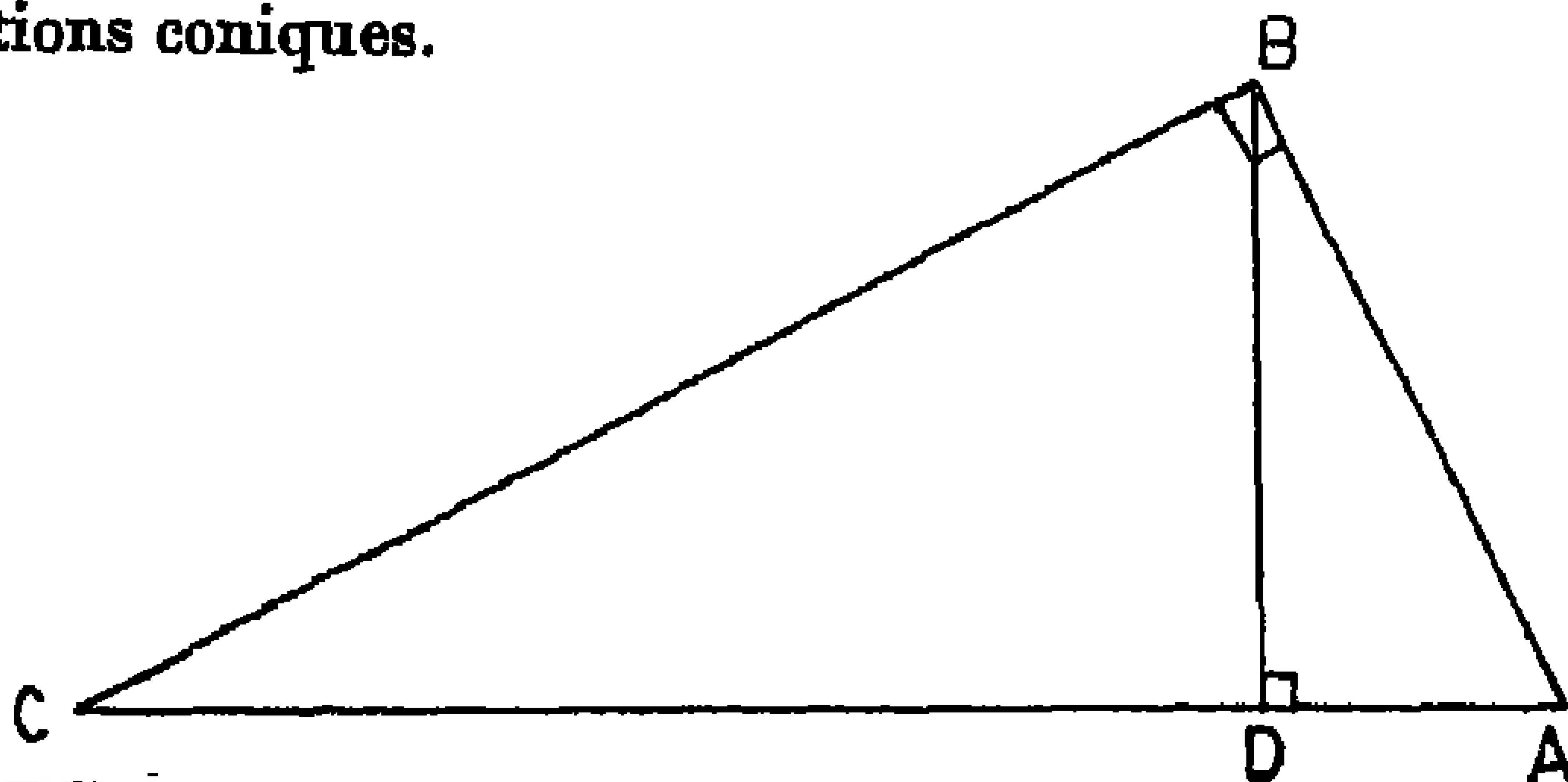
A l'égard du nombre, on le considère comme séparé des matières dans l'intellect, et il n'a pas d'existence dans les individus,car
3v le nombre est une chose / intelligible, universelle, qui n'existe que réalisée dans les matières.

Quant à la chose, sa position par rapport aux grandeurs continues est la position de la ligne droite.

Quant au carré, il est dans la position du carré de côtés égaux

1. Littéralement: la grandeur.
2. Etant donné une unité de mesure chaque grandeur devient alors une pluralité par rapport à cette unité. Il est clair que le sens est ici: quand chacune des grandeurs se divise. Cf. texte 3 r.
3. Littéralement: "la science supérieure".

Multiplions dix par lui-même; on a cent. Additionnons le tout, on a cent plus un carré, qui est le carré de AB, comme c'est montré dans la proposition 47 du Livre I. Et comme le rapport de AC à AB est égal au rapport de AB à AD, en raison de la similitude des deux triangles ABC et ABD, le produit de AC par AD est égal au carré de AB. Si donc on divise le carré de AB, qui est cent en nombre,plus un carré, par AD, qui est dix, il résulte de la division dix en nombre, et un dixième du carré, c'est-à-dire AC. Mais nous avons supposé que AC est égale à la somme de AB et de BD; la somme de AB et de BD est donc égale à dix en nombre et un dixième du carré. Si on en retranche BD, qui est la chose, il reste dix en nombre et un dixième du carré moins une chose, c'est-à-dire AB. Multiplions-la par elle-même; on obtient cent en nombre, plus trois carrés plus un dixième d'un dixième de carré-carré, moins vingt choses et moins un cinquième du cube, égal à cent en nombre plus un carré. Restaurons et réduisons;[1,2] il reste deux carrés plus un dixième d'un dixième de carré-carré égaux à vingt choses plus un cinquième de cube. Divisons le tout par une chose pour nous ramener aux quatre plus petits genres dans ce rapport. Il résulte de la division un dixième d'un dixième de cube, plus deux choses, égaux à un cinquième de carré, plus vingt en nombre. Nous complétons le dixième du dixième de cube en le multipliant par cent, et de même tous les genres sont multipliés par cent. Il en résulte qu'un cube plus deux cents choses sont égaux à vingt carrés plus deux mille en nombre. L'analyse a donc conduit à une équation entre quatre genres, ce qu'on ne peut découvrir par la géométrie plane, en raison du cube. On a besoin en cela des sections coniques.



1. Nous avons opté pour cette traduction des termes جبر وقابل

2. A ces deux mots, l'auteur ajoute قاص, qui signifie "se démolir", "s'ébouler"... Image concrète contenue dans les deux expressions précédentes (on retranche les termes semblables).

Et je dis: *EG* est plus petite que *GI*. Si en effet elle était plus grande, *EH* serait plus grande que *HI*, et *HG* – qui est la droite moyenne entre les deux droites *EH* et *HI* – serait plus grande que *HI*. Mais on a supposé que *HG* est égale à *IB*. *IB* serait donc plus grande que *IH*, et la partie serait plus grande que le tout. Ce qui est impossible. On a donc démontré que ce triangle répond à la propriété suivante: le petit côté plus la perpendiculaire sont égaux au grand côté. Ce qu'il fallait démontrer.

Au nombre de ses propriétés: le plus grand des deux côtés qui entourent l'angle droit est égal à la somme du plus petit et de la portion du diamètre limitée par la perpendiculaire, et attenante[1] au plus petit côté. Prenons comme exemple la figure précédente.

Je dis: la somme de *EG* et *EH* est égale à *GI*.

Démonstration: le rapport de *ED* à *EH* est égal au rapport de *IB* à *BH*. Par composition, le rapport de *DH* à *HE* est égal au rapport de *IH* à *HB*. Par inversion des moyens, le rapport de *DH* à *HI* est égal au rapport de *EH* à *HB*; mais le rapport de *EH* à *HB* est égal au rapport de *EG* à *GH*; et le rapport de *EG* à *GH* est égal au rapport de *GI* à *HI*, en raison de la similitude des deux triangles *EGI* et *GHI*. Le rapport de *GI* à *HI* est donc égal au rapport de *DH* à *HI*; *GI* est donc égale à *HD*, et *HD* est la somme de *EG* et *EH*. La somme de *EG* et *EH* est donc égale à *GI*. Ce qu'il fallait démontrer.

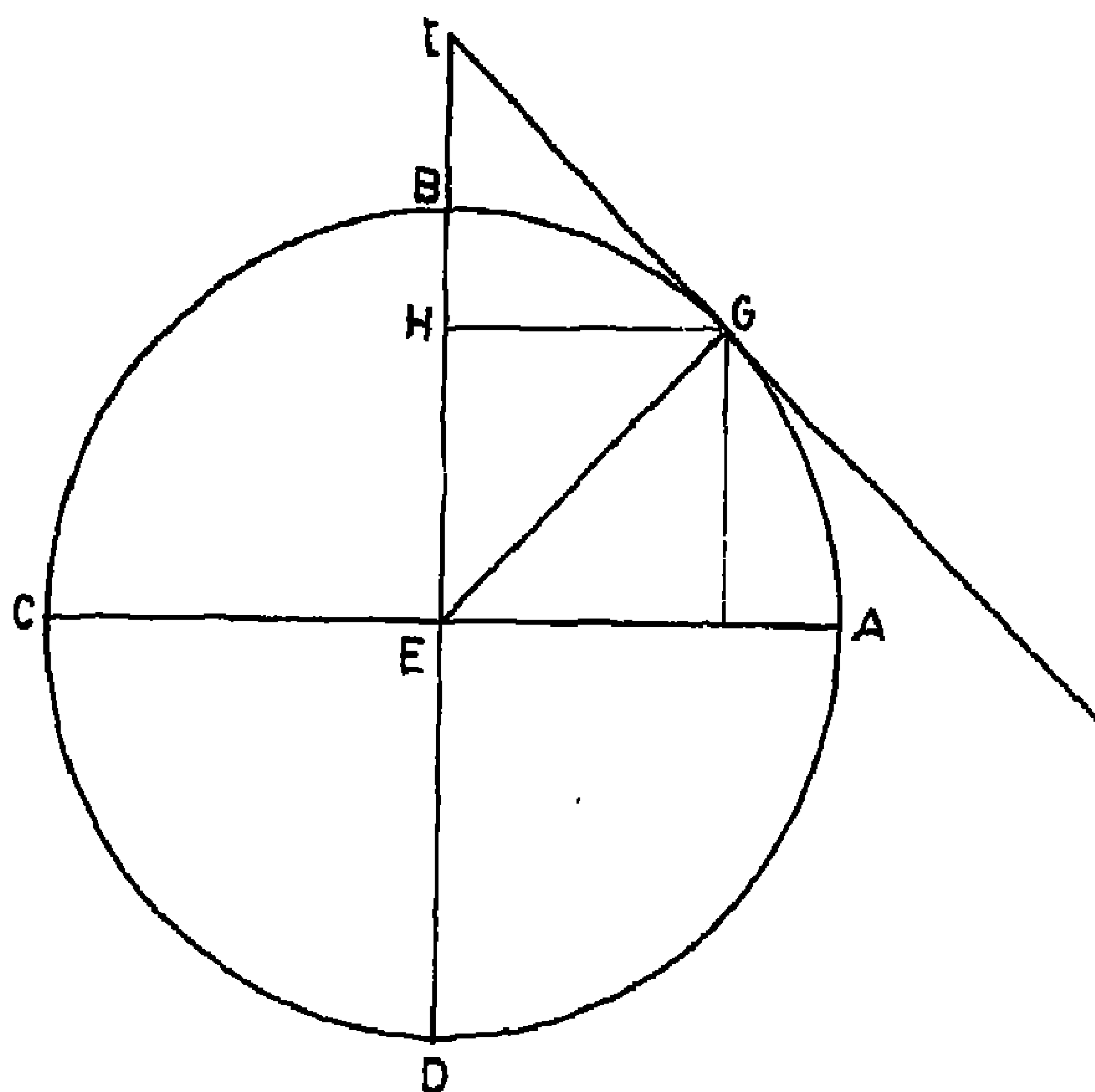
Après avoir introduit cela, posons le triangle *ABC*, dont l'angle *B* est droit, et menons du point *B* la perpendiculaire *BD* à *AC*. Descendons jusqu'à ce que l'analyse aboutisse à quelque chose de connu, en supposant que le côté *AB* ajouté à la perpendiculaire *BD* soit égal à *AC*; composons ensuite l'analyse pour obtenir un triangle répondant aux propriétés mentionnées.

Pour être guidés par nos éminents prédécesseurs en cet art, dans l'usage des termes des algébristes pour des problèmes semblables à ceux-ci, afin d'aplanir les voies sensibles, nous suivons en cela leur chemin. Il est permis de ne pas utiliser les termes de l'algèbre; le procédé est le même, si ce n'est que, si on utilise ces termes, la multiplication et la division seront plus faciles.

3r Posons la droite *AD* rationnelle en longueur; qu'elle soit dix; / posons *BD* une chose; multiplions-la par elle-même, on a un carré.

1. Littéralement: ... limitée par la perpendiculaire au diamètre en direction du petit côté.

deux moyens, le rapport de *AE* à *EH* est égal au rapport de *GH* à *HB*. Mais le rapport de *CE* à *EH* est égal au rapport de *BI* à *BH*; le rapport de *GH* à *HB* est donc égal au rapport de *BI* à *HB*; et les grandeurs dont les rapports à une seule et même chose sont égaux sont aussi égales, comme c'est montré dans la proposition 9 du Livre V. *GH* est donc égale à *BI*, et *GE* est égale à *EB*. La somme de *EG* et *GH* est donc égale à la droite *EI*.



L'analyse a donc mené à un triangle rectangle, sous la condi-
2v tion que l'hypoténuse soit égale à l'un des côtés qui entourent /l'angle droit plus la perpendiculaire menée de cet angle à l'hypoténuse Toutes les fois que l'on construit un triangle rectangle ayant cette propriété, on peut composer cette figure de manière géométrique. Or ce lemme, à savoir que le triangle ait cette propriété, est fort utile dans les figures analogues. Ce triangle a par ailleurs d'autres propriétés, dont on va exposer certaines pour que le lecteur pénètre leur utilité dans la plupart des problèmes analogues.

Je dis que ce triangle ne peut pas être isocèle.

Si en effet le côté *EG* était égal à *GI*, alors *EH* serait égale à *HI*, et la perpendiculaire serait égale à chacune d'elles. *EI* serait le double de la perpendiculaire, et la somme de *EG* et de la perpendiculaire serait plus grande que la corde; or nous avons supposé qu'elle lui était égale .Ce qui est absurde.

2r et la figure serait connue. / Et de même la droite IK est de position inconnue, car si elle était de position connue, le point I serait de position connue; et si le point I était de position connue, la droite IB serait de grandeur connue; et si la droite IB était de grandeur connue, la figure serait connue. Or il n'en est pas ainsi, puisque notre but est de connaître la figure.

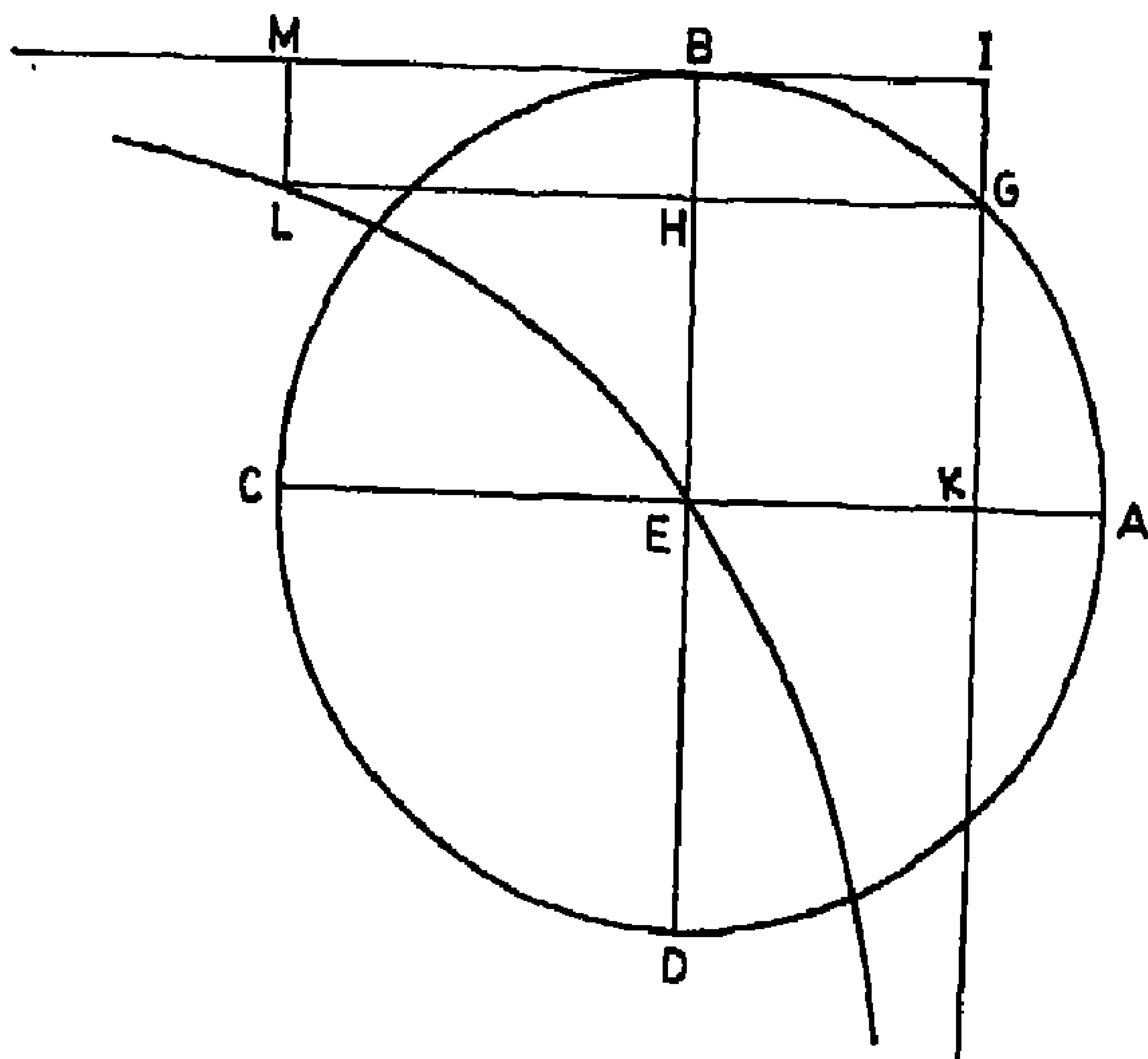
Si le point L était de position connue, ou si la droite IK était de position connue, il serait possible de construire la figure et d'atteindre aisément notre but lors de la synthèse. Mais aucun des deux n'est facile à connaître.

Eviter cette méthode mène le chercheur qui domine le livre des *Coniques* à ce qu'on demande, par une autre méthode; et il peut ainsi pénétrer la méthode que je vais exposer.

Si j'ai introduit cette méthode, en dépit de sa difficulté, c'est en guise de préparation pour l'élève, comme initiation. Je ne l'ai pas achevée, et ne l'ai pas composée d'une manière géométrique ,en raison de sa difficulté, et du nombre de ses besoins en multiples lemmes, ainsi qu'en sections coniques. Que l'achève celui qui veut, parmi ceux qui connaissent les sections coniques, après avoir assimilé la méthode que je vais exposer; celle-ci, même si elle a également besoin de lemmes coniques, est beaucoup plus facile que la première, et ses lemmes sont d'une utilité plus générale.

Je dis avec l'Aide de Dieu: nous retraçons la figure, et, en supposant que nous avons fait ce que nous voulions – que le rapport de AE à GH soit égal au rapport de EH à HB – nous descendons par l'analyse. Menons du point G la tangente GI au cercle, d'après ce qu'a montré Euclide dans la proposition 16 du Livre III. Prolongeons EB, jusqu'à ce qu'elle coupe la tangente au point I, et joignons GE. Puisque le triangle EGI a son angle G droit, et puisqu'on a mené de l'angle G la perpendiculaire GH à la base, alors, d'après la proposition 8 du Livre VI, le rapport de EH à HG est égal au rapport de HG à HI; le carré de HG est donc égal au produit de EH par HI; mais le carré de HG est égal au produit de DH par HB; le produit de DH par HB est donc égal au produit de EH par HI; le rapport de HD à EH est donc égal au rapport de HI à HB, d'après ce qui a été montré dans la proposition 16 du Livre VI. Par décomposition, le rapport de EC à EH est égal au rapport de BI à BH. Mais le rapport de AE à GH est égal au rapport de EH à HB. Par inversion des

HB, et que *BM* est égale à *AE*, alors le rapport de *BM* à *GH* est égal au rapport de *EH* à *HB*, et le produit de *BM* par *HB* est égal au produit de *GH* par *EH*, comme l'a montré Euclide dans la proposition 16 du Livre VI des *Eléments*; mais le produit de *BM* par *HB* est égal au rectangle *BL*; et le produit de *GH* par *EH* est égal au rectangle *HK*; le rectangle *BL* est donc égal au rectangle *HK*. Ajoutons communément aux deux le rectangle *HI*. Le rectangle *IE* est alors égal au rectangle *IL*. Si on construit une hyperbole qui ne rencontre aucune des deux droites *KI* et *IM*, et qui passe par le point *E*, comme l'a montré Apollonius dans la proposition 59 du premier livre de l'ouvrage des *Coniques*, et dans les propositions 6 et 5 du deuxième livre de cet ouvrage[1] – cette construction s'effectue en effet au moyen de ces trois propositions – alors l'hyperbole passe nécessairement par le point *L*, comme c'est montré dans la converse de la huitième proposition du deuxième Livre de l'ouvrage des *Coniques*.[2] Or le point *E* est de position connue, et la droite *BM* est de position et de grandeur connues. Ce n'est que lors de la synthèse que le point *L* est de position inconnue; car s'il était de position connue, le point *H* serait de position connue, puisque la droite *HL* est de grandeur connue; la droite *BH* serait donc de grandeur connue,

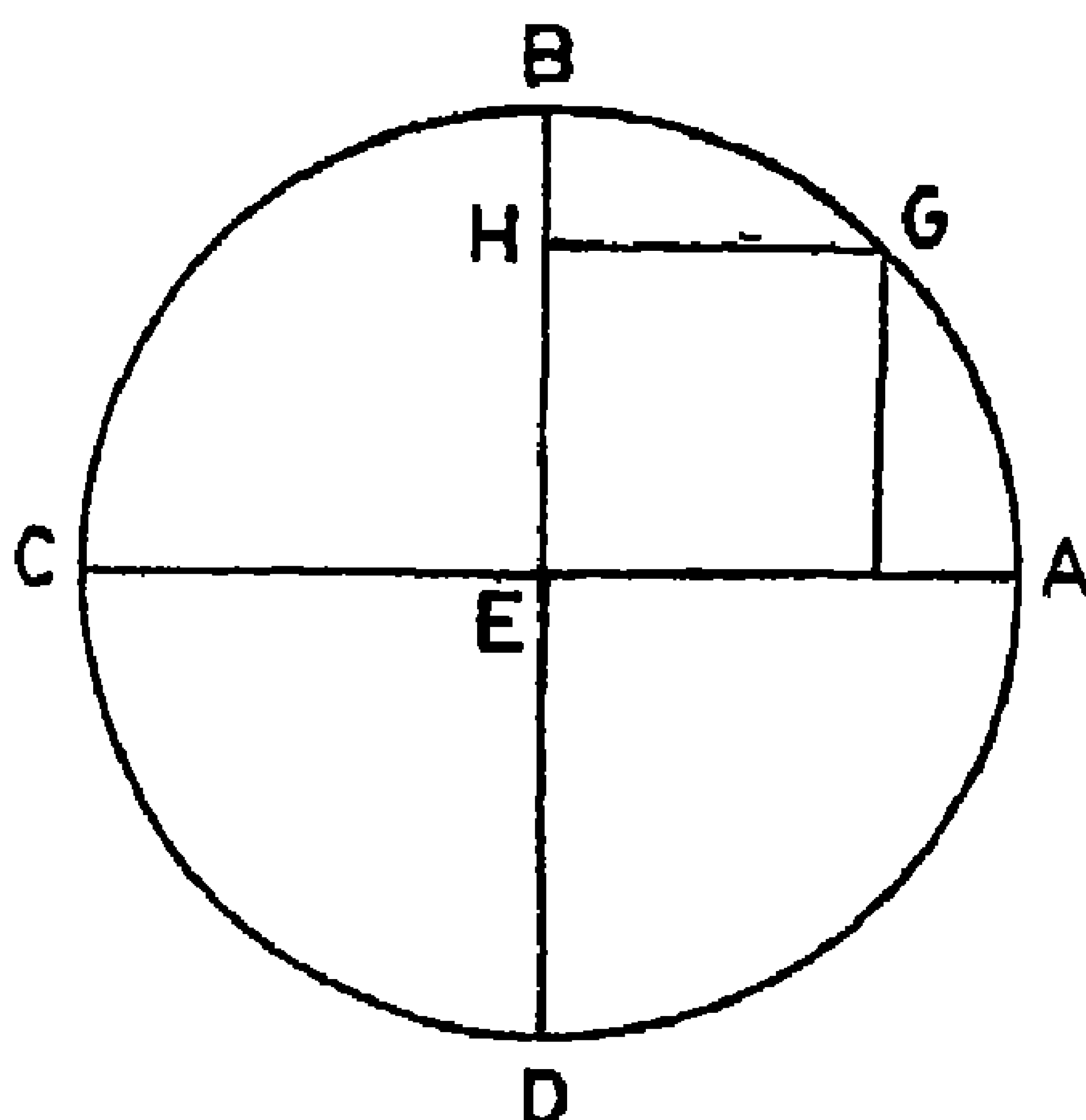


1. Il s'agit de I-55, II-4 et II-5, comme on l'a vu précédemment. 6 et 5 sont dûs dans ce texte, sans aucun doute, à une erreur du copiste.
2. Il s'agit de la proposition 12 du même livre.

1v Traité d'abū al-Fatḥ ʿUmar b. Ibrāhīm al-Khayyāmī

Au Nom de Dieu Clément et Miséricordieux; c'est à Lui que nous nous fions, et c'est de Lui que nous implorons le secours.

On veut diviser le quart AB d'un cercle $ABCD$ en deux parties au point G, et mener la perpendiculaire GH au diamètre BD, telle que le rapport de AE à GH soit égal au rapport de EH à HB; E est le centre du cercle, et AE le demi-diamètre.



En supposant que[1] nous l'avons fait, nous descendons[2] jusqu'à ce que l'analyse aboutisse à quelque chose de connu. Nous composons[3] suivant la même manière. Nous retraçons[4] le cercle $ABCD$, de centre E, et nous menons AC et BD, qui se coupent suivant un angle droit.[5] Menons la perpendiculaire GH telle que le rapport de AE à GH soit égal au rapport de EH à HB. Menons les deux perpendiculaires KGI et IBM et complétons le rectangle IL après avoir construit la droite BM égale à AE.

Puisque le rapport de AE à GH est égal au rapport de EH à

1. Littéralement: comme si.
2. Par ce verbe l'auteur décrit de manière figurée la démarche traditionnelle de l'analyse, dans le couple analyse - synthèse.
3. Ce verbe rend ici l'arabe ركب , d'où est dérivé le mot التركيب , (synthèse).
4. Littéralement: répétons.
5. Des angles droits.

quart de AC, et menons de AK <du point K> une perpendiculaire qui coupe la section au point M. Le rapport du carré de LC au carré de KM est donc égal au rapport de AC à AK, car les deux <premières> droites sont des ordonnées de la parabole. Apollonius l'a montré dans la proposition 19 du Livre I.[1] KM est donc la moitié de $L\,C$, qui est vingt moins quelque chose d'infime; CI est égale à quarante-et-un; AK est égale à neuf plus trois-quarts; et AI est égale à deux. La droite IK est donc égale à onze plus trois-quarts. Mais puisque le rapport de KG à KI est égal au rapport de HB à BI, qui sont égales, la droite KG est donc égale à KI. GM est donc
25v plus grande que huit, et elle est/ à l'intérieur <de la surface limitée par > la tangente à l'hyperbole. Dans cette position, il est donc nécessaire qu'elle soit à l'intérieur[2] de l'hyperbole.

Certes, les deux sections ne se rencontrent pas si BC est plus grande que CA; mais ceci n'est pas nécessaire pour toutes les formes. Abū al-Jūd s'est donc trouvé réfuté dans ce jugement, comprends-le. Si tu veux trouver d'autres exemples numériques, tu le pourras à partir de ce problème: appliquer à une droite donnée, un solide défaillant d'un cube, et égal à un autre solide donné.

Que le côté du cube, qui est égal au solide donné, soit égal à la moitié de la droite, ou qu'il soit plus petit qu'elle, ceci est nécessaire; et s'il est plus grand, il peut alors se trouver des cas impossibles, selon ce que nous t'avons montré.

1. Il s'agit de la proposition 20.
2. Il veut dire entre la tangente et la courbe.

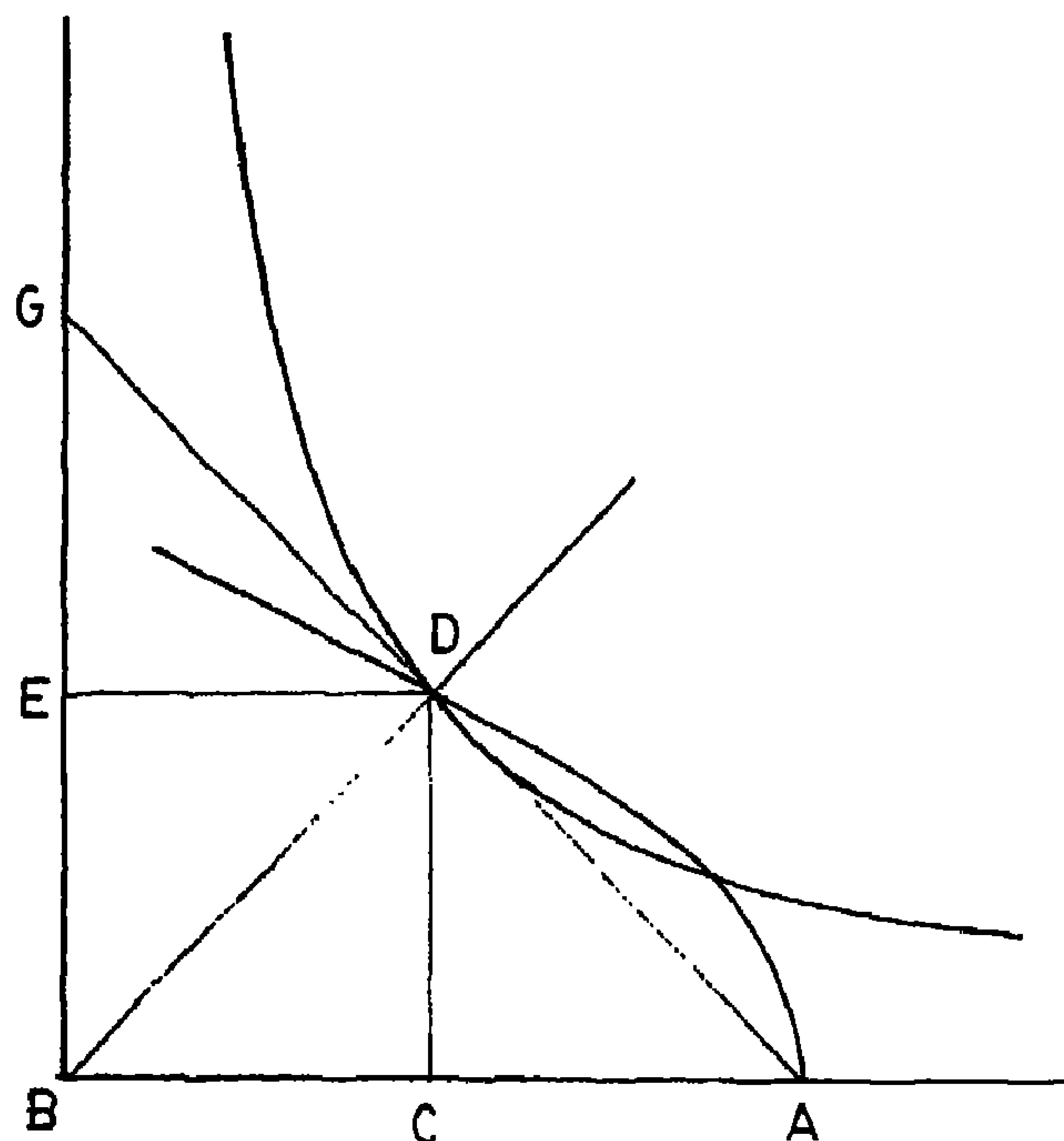
par intersection ou par contact, en un point ou en deux points entre A et D, comme nous l'avons montré ci-dessus. Et à ce propos on a une démonstration plus générale que celle que nous avons mentionnée.

Soit AB égale au nombre de carrés; BC le côté du cube, plus grand que la moitié de AB. Complétons CE, et construisons les deux sections, comme tu le sais.

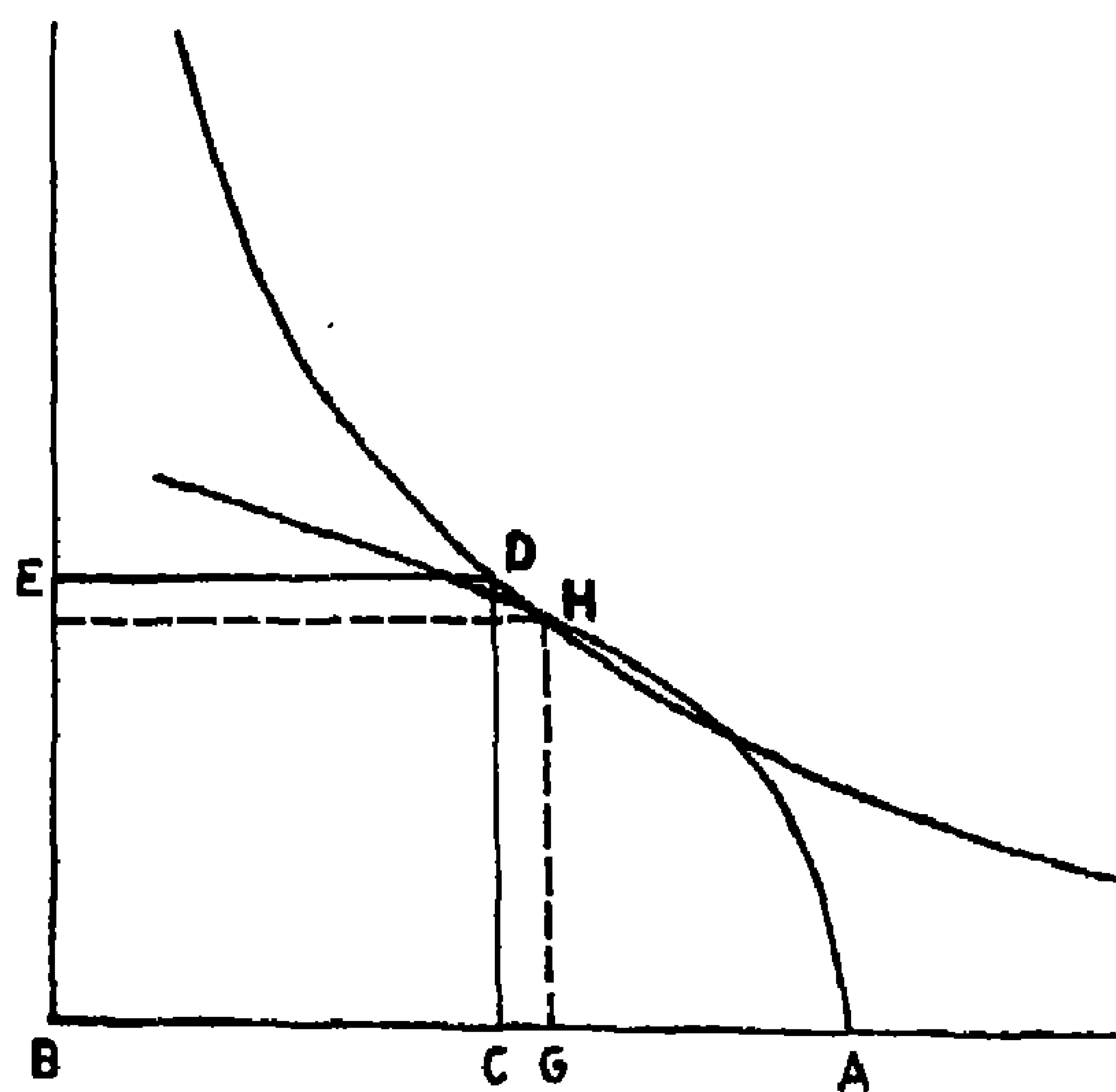
Soit AB égale à dix; GB égale à six. Le produit du carré de GB par GA est donc cent quarante-quatre, c'est-à-dire le nombre; et son côté est BC. Il est nécessaire que BC soit plus grande que cinq, car le cube de cinq est cent vingt-cinq; or le solide dont la base est le carré de GB et dont la hauteur est GA est égal au cube de BC. Leurs bases sont alors inversement proportionnelles à leurs hauteurs, je veux dire que le rapport du carré de GB au carré de BC est égal au rapport de BC à GA. Menons du point G une perpendiculaire qui coupe l'hyperbole en un point H, et complétons HB. Le rectangle HB est égal à CE; leurs côtés sont donc inversement pro-
25r portionnels, je veux dire que le rapport de GB à BC / est égal au rapport de BC à GH; le rapport du carré de GB au carré de BC est donc égal au rapport de GB à GH. Mais ce rapport était égal au rapport de BC à GA; le rapport de GB à GH est donc égal au rapport de BC à GA. Et de même, si on intervertit les moyens, le rapport de GB à BC est égal au rapport de GH à GA. Les quatre droites, GB, BC, GH, GA, sont donc en proportion continue. Le carré de GH est donc égal au produit de BC par GA. Or BC est le côté droit de la parabole d'axe AB et de sommet A; GH est donc une ordonnée, et le point H est par conséquent nécessairement sur le périmètre de la parabole. Or il était sur le périmètre de l'hyperbole; par conséquent, elles se rencontrent. L'erreur d'Abū al-Jūd est donc manifeste lorsqu'il dit que les deux sections ne se rencontrent pas. C'est ce qu'on voulait.

Mais pour que ceci soit encore plus manifeste, posons AB égale à quatre-vingts, et BC – le côté du cube égal au nombre – égale à quarante-et-un, c'est-à-dire plus grande que AC. Le point D tombe donc à l'extérieur de la parabole. Que la parabole passe par le point L. La droite LC est donc la racine de mille cinq cent quatre-vingt-dix-neuf, c'est-à-dire quarante moins quelque chose d'infime. Faisons IC égale à CB, et BH égale à BI. Joignons IH; elle est tangente à l'hyperbole, comme nous l'avons montré. Séparons AK, le

autre point, entre A et D. Ce qu'il fallait démontrer. Voici la part d'erreur de cet homme éminent lorsqu'il dit que les deux sections doivent être tangentes au point D.



Mais quand il dit : si BC est plus grande que AC, alors le problème est impossible, car les deux sections ne se rencontrent pas,



cette assertion est fausse. Au contraire, elles peuvent se rencontrer,

traité à celui qui est attribué à cet homme éminent. Or je crois que je n'ai pas épargné mon effort pour épuiser<mon étude>avec concision, en évitant le risque de la prolixité fastidieuse. Si j'avais voulu, j'aurais fixé par un exemple chacune de ces espèces et de leurs formes; mais je craignais d'être prolixe, aussi me suis-je limité à ces règles universelles, comptant sur l'esprit de l'élève, car celui dont l'esprit peut concevoir ce traité ne peut manquer de trouver les exemples particuliers qu'il désire, et de les examiner successivement, un à un.

C'est Dieu qui nous mène au succès, et c'est en son Assistance que nous nous confions en tout état.

Après quoi, un de nos amis nous a suggéré de montrer l'erreur commise par Abū al-Jūd Muḥammed b. al-Leith dans la cinquième espèce des six espèces trinômes qui peuvent être résolues par les sections: un cube plus un nombre sont égaux à des carrés. Abū al-Jūd a dit: posons le nombre des carrés égal à la droite AB. Séparons-en le côté du cube égal au nombre, c'est-à-dire BC. La droite BC ou bien est égale à CA, ou bien est plus grande qu'elle, ou bien plus petite. Il a dit: si elle est égale à BC, alors complétons le rectangle CE; construisons une hyperbole passant par le point D, et qui ne rencontre ni AB ni BE; construisons une parabole de sommet le point A, d'axe AB, et dont le côté droit soit BC. La section passe nécessairement par le point D, comme nous l'avons montré. Il a ensuite prétendu que les deux sections sont tangentes au point D; il s'est trompé, car elles doivent se couper.

Démonstration:

Faisons BG égale à BA; joignons AG. Elle passe nécessairement
24v ment par le point D, et elle est à l'intérieur de la parabole; l'angle / ADB est droit, et l'angle ABD est égal à l'angle GBD. Mais on sait que l'axe de l'hyperbole partage en deux moitiés l'angle qui entoure la section. Il est donc nécessaire que la droite BDI soit l'axe de l'hyperbole qui passe par le point D; or la droite AD est parallèle aux ordonnées; elle est donc tangente à l'hyperbole. Il s'ensuit que la parabole coupe l'hyperbole, sans qu'elle passe entre elle et la tangente; car, si elle lui était tangente, alors les droites menées du point D à un point quelconque donné sur le périmètre de AD tomberaient entre la section et sa tangente; ce qui est impossible. Il est donc nécessaire que la parabole coupe l'hyperbole en un point D et en un

Pour celui qui s'arrête aux propositions exposées ici, et qui possède en outre une puissante disposition naturelle, ainsi que la pratique de ces problèmes, rien ne sera plus obscur dans les problèmes ardus pour nos prédécesseurs.

Il est temps maintenant de clore ce traité, en louant Dieu Très-Haut et en implorant Sa Bénédiction sur Tous Ses Prophètes.

< Problème d'Abū al-Jūd b. al-Leith >

Et du reste, cinq ans après que j'eusse composé ce traité, quelqu'un qui connaît un peu de géométrie m'a raconté que le géomètre Abū al-Jūd Muḥammed b. al-Leith parle de l'énumération de ces espèces et de la décomposition de la plupart en sections coniques, sans toutefois en épuiser toutes les formes, et sans distinguer les cas possibles des cas impossibles, mais seulement selon qu'ils se présentent lorsqu'on les examine dans les problèmes particuliers.

Je n'écartais pas cette idée, car les deux espèces que j'ai attribuées à l'un de nos prédécesseurs sont attribuées à Abū al-Jūd,[1] et je les ai vues moi-même et les ai scrutées, dans l'ensemble des écrits d'Abū al-Jūd, de la main de al-Ḥazimī al-Khwārizmī. L'une d'elles est trinôme: un cube plus un nombre sont égaux à des carrés. Elle comporte des formes, et ces formes ont des conditions, comme on l'a mentionné dans ce traité. Or il n'a pas épuisé ces conditions, et fut ensuite également réfuté dans son jugement à propos de cette espèce, lorsqu'il dit: "Si le côté du cube qui est égal au nombre est plus grand que la moitié du nombre des carrés, le problème est impossible"– il n'en est pas ainsi, comme nous l'avons montré. Et cela parce qu'il n'a pas saisi le contact entre les deux sections ou, dans l'autre cas, leur intersection.

La deuxième espèce est quadrinôme: un cube plus un nombre plus des côtés sont égaux à des carrés. Et, sur ma vie!, il a excellé en
24r s'appliquant à ce problème, devant / lequel un groupe de géomètres s'étaient trouvés impuissants . Mais son problème est particulier, et cette espèce comporte différentes formes et conditions, car, dans ses problèmes, il y en a qui sont impossibles; or il n'en a pas achevé l'examen exhaustif. J'ai mentionné cela pour que celui à qui parviendront ces deux traités puisse – pourvu que ce qui m'a été rapporté à propos de cet homme éminent soit vrai – confronter mon

1. à lui.

cine du carré est ce qu'on cherchait, et elle est deux, ce qui est égal à l'unité plus deux parties de sa racine.

Et de même si on dit: "Un carré plus deux de ses racines sont égaux à un plus deux parties de la racine", ceci est équivalent à: "un cube plus deux carrés sont égaux à une racine plus deux".

On détermine le côté du cube par les sections coniques, ainsi qu'on l'a montré; le carré de ce côté est donc le carré cherché.

Et de même si on dit: "une racine plus deux en nombre plus dix parties de racine sont égaux à vingt parties de carré", c'est équivalent à: "un cube plus deux carrés plus dix racines sont égaux à vingt en nombre". On détermine le côté du cube par la méthode des coniques; c'est la racine cherchée.

Généralement, pour quatre degrés successifs quelconques de ces sept degrés, la règle est la même que pour les vingt-cinq espèces mentionnées.

Mais si on passe à cinq degrés, ou six, ou sept, il n'est pas possible de résoudre cela de quelque manière que ce soit.

Exemple: si on dit: "un carré plus deux racines sont égaux à deux en nombre plus deux parties de carré", cela ne peut être résolu, puisque le carré est le deuxième <degré>, et la partie du carré le sixième; on passe donc à cinq degrés. Procède de la même manière pour le reste.

La totalité des espèces binômes entre ces sept degrés sont au nombre de vingt-et-une, dont deux ne peuvent être résolues au moyen de nos méthodes – on a besoin pour cela du lemme d'Ibn al-Haytham .Il reste donc dix-neuf espèces, qu'on résout au moyen de nos méthodes, les unes par les propriétés du cercle, les autres par les propriétés des sections.

Toutes les équations trinômes <entre trois degrés successifs> sont au nombre de quinze, que l'on résout par les propriétés du cercle. Toutes les équations trinômes entre quatre degrés successifs sont au
23v nombre de vingt-quatre, / que l'on résout par les propriétés des sections. Toutes les équations quadrinômes entre quatre degrés successifs sont au nombre de vingt-huit, que l'on résout par les propriétés des sections. Toutes les espèces qui se trouvent entre ces sept degrés, et que l'on résout au moyen des méthodes que nous avons exposées, sont donc au nombre de quatre-vingt-six, dont six seulement sont mentionnées dans les livres de nos prédécesseurs.

proportion continue. Ceci a été démontré par Abū ᶜAlī ibn al-Haytham;[1] seulement, c'est très difficile, aussi ne pouvons-nous le joindre à notre livre.

De même, si on dit : "Un cube quelconque est égal à un nombre de parties du carré de son côté", on a besoin de la proposition mentionnée, que nous ne pouvons pas résoudre par nos méthodes.

Et, en général, pour le produit du premier par le sixième de ces sept degrés, on a besoin de quatre droites entre deux droites pour que les six soient en proportion, ainsi que l'a démontré Abū ᶜAlī ibn
23r al-Haytham. Et si on dit : "un cube quelconque / est égal à seize parties de son côté", nous multiplions le premier par le cinquième, et la racine de la racine du produit est le côté du cube cherché. Et de manière analogue pour chacun de ces sept degrés lorsqu'il est égalé à celui qui, à partir de lui, est le cinquième dans la proportion.

Pour les équations trinômes, par exemple : "une racine est égale à l'unité plus deux parties de la racine", est équivalent à : "un carré est égal à une racine plus deux en nombre", puisque les trois < termes > sont proportionnels aux trois < termes > mentionnés. On le résout au moyen de la méthode déjà citée ; on obtient donc le carré égal à quatre et, donc, égal à sa racine plus deux en nombre. La ra-

---

1. Selon al-Khayyām, Ibn al-Haytham a donc résolu le problème de 6 proportions continues. Mais, d'après ce témoignage, on ignore comment il y est parvenu.

Tenons-nous en à la technique déjà connue des proportions continues :

$$\text{Soit } \frac{\alpha}{x} = \frac{x}{y} = \frac{y}{z} = \frac{z}{u} = \frac{u}{\beta} \qquad (1)$$

d'où on obtient en particulier :

$$y^5 = \alpha^3 . \beta^2 \qquad (2)$$

De (1) on obtient :

$$yz = \alpha\beta$$

$$\alpha z^2 = y^3$$

La première équation est celle d'une hyperbole et la seconde celle d'une parabole généralisée, faciles à construire. Réciproquement, à l'aide de ces deux courbes on peut résoudre l'équation (2).

Mais dans tous les cas, on aura une cubique. Si cette hypothèse est vraie, elle implique que Ibn al-Haytham était en possession d'une méthode, utilisée plus tard par Fermat dans sa *Dissertatio Tripartita*, pour résoudre les problèmes analogues. Cette conjecture, très vraisemblable, sera vérifiée le jour où on retrouvera le texte dans lequel Ibn al-Haytham a résolu ce problème.

exposée, des sections coniques, on exhibe le côté du cube; c'est la partie cherchée de la racine. Posons son rapport à l'unité donnée égal au rapport de l'unité donnée à une autre droite. Cette droite est donc le côté du cube cherché.

Il apparaît donc qu'il y a vingt-cinq autres espèces de ces équations entre les quatre <termes>, proportionnelles aux vingt-cinq
22v espèces précédentes. /

Quant à la multiplication des unes par les autres, elle est connue et évidente, dans les livres des Algébristes; tu peux la saisir, aussi ne nous y attarderons-nous pas.

Quant aux équations entre ces quatre <termes> et les quatre <termes>précédents, je les montre comme suit. Si on dit "un cube est égal à dix parties de cube", c'est-à-dire à dix parties de lui-même, le cube est alors le premier des sept degrés, et la partie du cube est le septième; multiplie l'un par l'autre et prends la racine du résultat; le résultat est le moyen, je veux dire le quatrième <degré>, qui est le cube cherché. Pour plus de précision : si on multiplie un nombre quelconque par sa partie homonyme, on obtient l'unité. Si on le multiplie par deux parties, on obtient deux. Et si on le multiplie par dix parties, on obtient dix en nombre. C'est donc comme si on disait dans notre problème : un cube quelconque multiplié par lui-même donne dix. Sa racine est donc le cube cherché. Puis la détermination du côté de ce cube est effectuée comme nous l'avons montré, par les sections coniques . De même, si on dit qu'un carré quelconque est égal à seize [parties] de ses parties homonymes, multiplie alors l'unité par seize, prends la racine du résultat, qui est quatre : quatre est donc le carré cherché. C'est comme si on disait : un carré quelconque multiplié par lui-même donne seize, conformément à ce qui précède.

Et de même, si on dit qu'une racine quelconque est égale à quatre de ses parties, c'est comme si on disait : si on multiplie un nombre quelconque par lui-même, il en résulte quatre; le nombre est deux. Mais si on dit : "un carré quelconque est égal à un nombre de parties du cube de son côté", la solution de ceci n'est pas possible par les méthodes que nous avons exposées, car il est besoin de faire apparaître quatre droites entre deux droites pour que les six soient en

Le rapport de la partie du cube à la partie[1] du carré est donc égal au rapport de la partie du carré à la partie de la racine, égal au rapport de la partie de la racine à l'unité, égal au rapport de l'unité à
22r la racine, égal au rapport de la racine / au carré, égal au rapport du carré au cube. Ce sont sept degrés successifs, selon le même rapport. Nous parlerons seulement des équations entre ces degrés.

Quant à la partie des carré-carrés, à la partie des carré-cubes et à la partie des cubo-cubes, et ainsi de suite, elles sont aussi proportionnelles, mais nous n'avons pas besoin de les mentionner ici, car nous n'avons aucun moyen pour les trouver.[2]

Sache que, si tu prends un huitième, qui est la partie du cube comme cube, sa partie est huit, qui est le cube; et inversement. Procède de manière analogue pour le reste. La partie du cube, la partie du carré, la partie de la racine, et l'unité, ces quatre <termes> se traitent donc selon la même règle que le cube, le carré, la racine et l'unité.

Exemple: si on dit "une partie du carré est égale à la moitié d'une partie de la racine", c'est comme si on disait "un carré est égal à la moitié d'une racine". Le carré est donc un quart, qui est la partie du carré. Le carré cherché est donc quatre, sa partie un quart, et la partie de sa racine est un demi. On procède d'une manière analogue pour les équations binômes.

Quant aux équations trinômes, si on dit : "une partie du carré plus deux parties de la racine sont égales à un plus un quart", c'est comme si on disait "un carré plus deux racines sont égaux à un plus un quart". Et par la méthode que nous avons exposée, on obtient la racine un demi, et le carré un quart. Or, d'après la question <posée>, qui était: "une partie du carré plus deux parties de la racine sont égales à un plus un quart", le quart, qui est le premier carré, est donc la partie de carré cherchée. Le carré cherché est donc quatre.

Il en est de même pour les équations quadrinômes.

Si on dit "une partie du cube plus trois parties du carré plus cinq parties de la racine sont égales à trois plus trois huitièmes", c'est comme si on disait "un cube plus trois carrés plus cinq racines sont égaux à trois plus trois huitièmes". Par la voie, que nous avons

1. Litt.: parties.

2. C'est-à-dire: lorsqu'elles sont les termes d'une équation de degré correspondant.

On a montré que ces trois espèces quadrinômes rentrent l'une dans l'autre, c'est-à-dire qu'il existe une forme de la première qui est elle-même une forme de la deuxième; une forme de la deuxième qui est une forme de la troisième; et une forme de la troisième qui est elle-même une forme de la deuxième, ainsi que nous l'avons montré.

< Equations qui contiennent l'inverse de l'inconnue >

Nous avons maintenant achevé les vingt-cinq espèces de propositions de l'algèbre et de l'al-muqābala, et nous les avons vraiment traitées de manière exhaustive; nous avons atteint les formes de chacune des espèces; nous avons donné la règle pour distinguer les cas possibles d'avec les impossibles dans les problèmes où il en figure d'impossibles, et nous avons montré que la plupart de ces problèmes ne comportent pas de cas impossibles; traitons donc à présent de leurs parties.

La partie d'une chose est un nombre dont le rapport à l'unité est égal au rapport de l'unité à cette chose. Si donc la chose est trois, la partie est un tiers; et si la chose est un tiers, la partie est trois. Et de même si elle est quatre, sa partie est un quart; et si elle est un quart, sa partie est quatre.[1] En général, la partie de tout nombre est la partie homonyme de ce nombre, comme le tiers <est l'homonyme> de trois, si le nombre est un entier, et trois < est l'homonyme > du tiers, si le nombre est une fraction. De même, la partie du carré est la partie homonyme du nombre[2] < qui représente ce carré >, que ce nombre soit un entier ou une fraction; et il en est de même pour la partie du cube. Et pour rendre cela apparent au sens, on peut l'exposer en un tableau:

Partie du cube	Partie du carré	Partie de la racine
1	1	1
8	4	2

l'unité	la racine	le carré	le cube
1	2	4	8

1. Voir al-Khayyām: *Eclaircissement..*, op. cit., ch. 2, pp. 39 et sq., où il développe sa théorie des proportions.

Voir à ce propos A. Youschkevitch, *Histoire des mathématiques arabes* (Paris, 1976), pp. 84 sq.

2. De son nombre.

Si maintenant S est égale à BC, BC est le côté du cube cherché.

Démonstration : le cube de BC est égal au nombre donné des carrés du même, et le nombre donné est égal au nombre donné des côtés du cube de BC. Le cube de BC plus le nombre donné est donc égal au nombre donné des carrés,[1] plus le nombre donné des côtés de ce cube. Et c'est ce qu'on voulait. Le cube de BC plus le nombre donné de ses côtés est aussi égal au nombre donné des carrés,[1] plus le nombre donné. Cette forme rentre donc dans la deuxième espèce.

Si enfin S est plus grande que BC, faisons BA égale à S, complétons le rectangle et construisons la première section passant par A, et la deuxième passant aussi par A. Elles se coupent. Si elles se rencontrent une seconde fois, soit par contact - donc en un seul point–, soit par intersection, – donc en deux points, ainsi qu'on le sait d'après le Livre IV de l'ouvrage des *Coniques* –, alors le problème est possible ; sinon, il est impossible. Si elles se coupent, on mène des deux points d'intersection deux perpendiculaires, qui délimitent deux côtés pour < construire > deux cubes. La démonstration se fait comme précédemment, sans que rien n'y soit changé.

On a montré que cette espèce a plusieurs formes, dont certaines
21v sont impossibles. Sa solution a été obtenue / par les propriétés de deux hyperboles.

1. De ses carrés.

section KCL. On a donc le rapport du carré de BD au carré de BE égal au rapport de CE à EA. Le solide dont la base est le carré de BD et la hauteur EA est donc égal au solide dont la base est le carré de BE et la hauteur CE. Ajoutons communément aux deux le solide dont la base est le carré de BE et la hauteur BC, lequel est le nom-
21r bre des carrés <des côtés> du cube de BE./Le cube de BE est égal au nombre donné des carrés du même plus le solide dont la base est le carré de BD et la hauteur EA.

Ajoutons communément aux deux le solide dont la hauteur est BA et la base le carré de BD, lequel nous avons construit égal au nombre donné. Le solide dont la base est le carré de BD et la hauteur BE, lequel est égal au nombre donné des côtés du cube de BE, plus le nombre donné des carrés < des côtés > du cube de BE, est donc égal au cube de BE plus le nombre donné.

truisons le cercle sur le diamètre *AC*. La section passant par le point *A* coupe le cercle en *K*, ainsi que nous l'avons montré. Menons du point *K* les deux perpendiculaires *KE* et *KM*, comme nous l'avons fait dans la proposition précédente. *EB* est alors le côté du cube cherché.

La démonstration se fait comme précédemment: retranchons le rectangle commun *ED*, les côtés de *EM* et de *EG* sont donc inversement proportionnels, ainsi que leurs carrés. La démonstration est donc la même que la précédente, sans que rien n'y soit changé.

20v On a montré que cette espèce comporte des cas / et des formes différents; l'une des formes rentre dans la troisième espèce; aucun de ses problèmes n'est impossible. Sa solution a été obtenue par les propriétés du cercle et d'une hyperbole.

Troisième espèce des trois espèces quadrinômes qui restent.

Un cube plus un nombre[1] sont égaux à des côtés plus des carrés. Supposons *BC* égale au nombre des carrés, *BD* perpendiculaire à *BC* et côté d'un carré égal au nombre des racines.

Construisons un solide dont la base soit le carré de *BD*, et qui soit égal au nombre donné. Soit *S* sa hauteur. La droite *S* ou bien est plus petite que *BC*, ou bien lui est égale, ou bien elle est plus grande qu'elle.

Qu'elle soit d'abord plus petite que *BC*.

Séparons de *BC* *BA* égale à *S*, et complétons *BG*. Construisons une hyperbole passant par le point *A*, et qui ne rencontre ni *BD*, ni *DG*. Soit la section *HAI*. Construisons une autre hyperbole de sommet le point *C*, dont l'axe soit sur le prolongement de *BC*, et dont chacun des côtés droit et transverse soit égal à *AC*; soit *KCL*. Elle coupe nécessairement l'autre section. Que la section *KCL* et la section *HAI* se coupent au point *M*. Le point *M* est donc de position connue, puisque les deux sections sont de position connue. Menons de *M* les deux perpendiculaires *MN* et *EMO*. Elles sont de position et de grandeur connues. Le rectangle *DA* est donc égal au rectangle *DM*, et par conséquent *NE* est égal à *GE*, ainsi que nous l'avons montré maintes fois. Leurs côtés sont donc inversement proportionnels, ainsi que les carrés de leurs côtés. Mais le rapport du carré de *ME* au carré de *EA* est égal au rapport de *CE* à *EA*, en raison de la

1 Litt.: nombres.

de *BE* plus le solide dont la base est le carré de *BD* et la hauteur 20r *EA*. Mais le premier solide est égal/ au nombre donné des carrés <des côtés> du cube de *BE*. Ajoutons communément aux deux le solide dont la base est le carré de *BD* et la hauteur *BA*, que nous avons construit égal au nombre donné. Le cube de *BE* plus le solide dont la base est le carré de *BD* et la hauteur *BE*, lequel est le nombre donné des côtés du cube de *BE*, est donc égal au nombre donné des carrés du même plus le nombre donné. Et c'est ce qu'on voulait.

Si maintenant *S* est égale à *BC*, alors *BC* est le côté du cube cherché.

Démonstration: Le cube de *BC* est égal au nombre donné des carrés du même, et le solide dont la hauteur est *BC* et la base le carré de *BD*, est égal au nombre donné. Il est aussi égal au nombre donné des côtés du cube de *BC*. Le cube de *BC* plus le nombre donné de ses côtés est donc égal au nombre donné des carrés du même plus le nombre donné. Cette forme rentre également dans la troisième espèce: puisque le nombre donné des côtés du cube de *BC* est égal au nombre donné, le cube de *BC* plus le nombre donné est donc égal au nombre donné des carrés,[1] plus le nombre donné des côtés de ce cube.

Si enfin *S* est plus grande que *BC*, faisons *BA* égale à *S*, et cons-

1. De ses carrés.

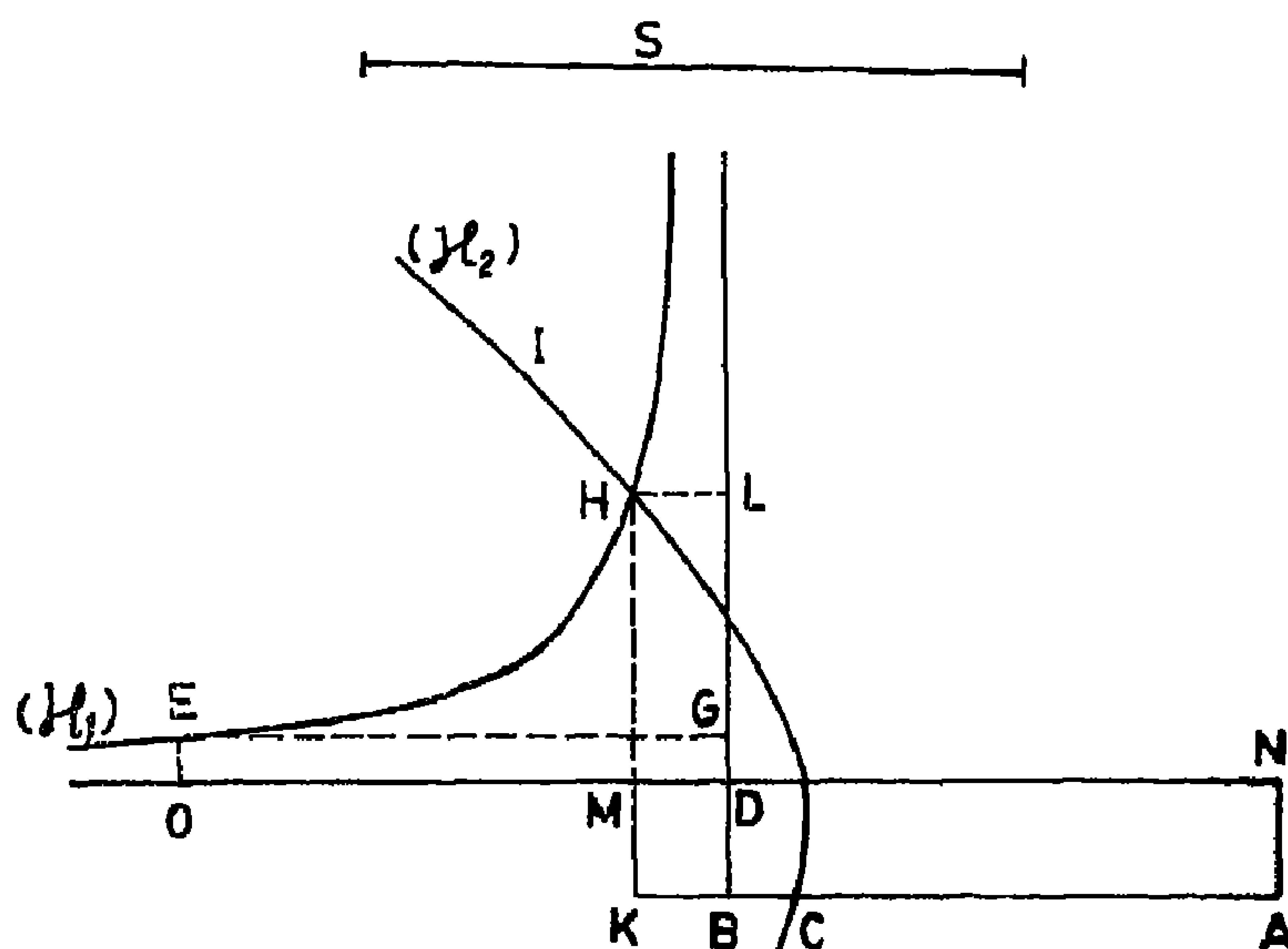
au cercle: elle coupe donc le cercle puisque, si elle se situait entre le cercle et *AG*, nous pourrions mener du point *A* une droite tangente à la section, ainsi que l'a montré Apollonius dans la proposition 60 du Livre II.[1] Cette droite se situerait alors ou bien entre *AG* et le cercle, ce qui est impossible; ou bien à l'extérieur de *AG*, et *AG* serait alors une droite située entre l'hyperbole et cette droite tangente, ce qui est impossible. La section *IAH* ne se situe donc pas entre le cercle et *AG*. Elle coupe par conséquent le cercle, et elle le coupera nécessairement en un autre point. Qu'elle le coupe en *K*. *K* est alors de position connue. Menons de *K* les deux perpendiculaires *KM* et *KE* à *BD* et à *BC* <respectivement> ; elles sont de position et de grandeur connues, comme tu le sais. Complétons le rectangle *KD*. Le rectangle *AD* est alors égal au rectangle *KD*. Retranchons *MG*, commun aux deux, et ajoutons communément *AK*. *BK* est donc égal à *AL*; leurs côtés sont donc inversement proportionnels, ainsi que les carrés de leurs côtés. Mais le rapport du carré de *KE* au carré de *EA* est égal au rapport de *EC* à *EA*. Le rapport du carré de *BD* au carré de *BE* est donc égal au rapport de *CE* à *EA*. Le solide dont la base est le carré de *BD* et la hauteur *EA* est donc égal au solide dont la base est le carré de *BE* et la hauteur *CE*.

Ajoutons communément aux deux le cube de *BE*. Le solide dont la base est le carré de *BE* et la hauteur *BC* est donc égal au cube

1. Il s'agit de la proposition 49 du même livre.

Si enfin S est plus grande que BC, faisons AB égale à S, et construisons la deuxième section passant par C, et dont chacun des deux côtés soit égal à AC. Elle coupe nécessairement l'autre section, et le côté du cube est encore BK. Le reste de la construction et de la démonstration est analogue à ce qui précède, si ce n'est que le rapport du carré de HK au carré de KA est égal au rapport de AK à KC.

On a donc montré que cette espèce comporte des cas et des formes différents; l'une des formes rentre dans la troisième espèce; aucun de ses problèmes n'est impossible. Sa solution a été obtenue par les propriétés de deux hyperboles.



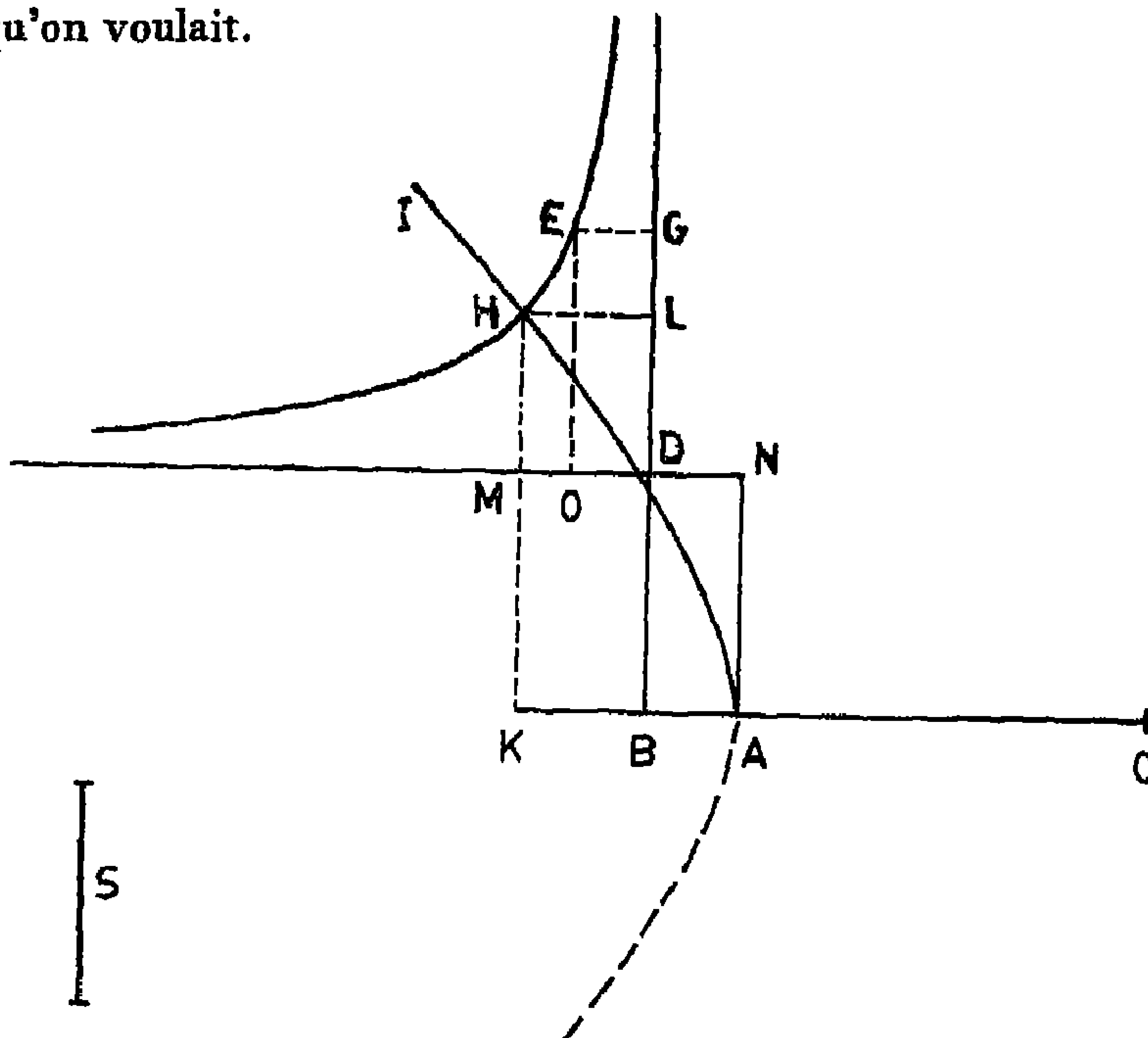
Deuxième espèce des trois espèces quadrinômes qui restent: Un cube plus des côtés sont égaux à des carrés plus un nombre.[1]

Posons BC égale au nombre donné des carrés, et BD le côté du
19v carré égal au nombre donné / des côtés, perpendiculaire à BC; construisons un solide égal au nombre donné, dont la base soit le carré de BD; soit S sa hauteur. La droite S ou bien est plus petite que BC, ou bien lui est égale, ou bien est plus grande qu'elle.

Qu'elle soit d'abord plus petite que BC. Séparons de BC BA égale à S, et complétons AD. Construisons sur le diamètre AC un cercle AKC; il est de position connue. Construisons ensuite une hyperbole passant par A, et qui ne rencontre ni BD ni DG. Soit la section HAI; elle est de position connue. HAI coupe AG, la tangente

1. Litt.: nombres.

BD et la hauteur *BK*, lequel est égal au nombre donné des côtés du cube de *BK*. Le cube de *BK* plus le nombre donné de carrés [1] est donc égal au nombre donné plus le nombre donné de ses côtés. C'est ce qu'on voulait.



Si maintenant *S* est égale à *BC*, alors *BD* est le côté du cube cherché.

19r Démonstration : le solide ayant pour base le carré de *BD* / et pour hauteur *BD* également, et qui est le nombre des côtés du cube de *BD*, est égal au cube de *BD* ; et le solide ayant pour base le carré de *BD* et pour hauteur *BC*, et qui est le nombre donné des carrés <des côtés> du cube de*BD*, est égal au solide dont la base est le carré de*BD* et la hauteur *S*, qui est le nombre donné. On a donc le cube de *BD* plus le nombre donné de carrés égal au nombre donné plus le nombre donné des côtés du cube. Et c'est ce qu'on voulait.

Mais on sait que le cube de *BD*, dans ce cas, plus le nombre donné, sont égaux au nombre donné des carrés < des côtés > plus le nombre donné de ses côtés. Cette espèce rentre donc dans la troisième espèce, qui est : un cube plus des nombres sont égaux à des carrés plus des côtés.

1. De ses carrés.

< Equations quadrinômes du troisième degré - 2 >

Après avoir achevé les quatre espèces quadrinômes, traitons des trois espèces dont chacune est composée de deux < termes > égaux à deux < termes >.

Première espèce des trois espèces quadrinômes qui restent: Un cube plus des carrés sont égaux à des côtés plus un nombre.

Posons BD égale au côté du carré qui est égal au nombre des côtés, et CB égale au nombre donné de carrés, perpendiculaire à BD. Construisons un solide dont la base est le carré de BD, et qui soit égal au nombre donné. Soit S sa hauteur. La droite S, ou bien est plus grande que BC, ou bien plus petite qu'elle, ou bien elle lui est égale.

Qu'elle soit d'abord plus petite que BC. Séparons de BC AB égale à S, et complètons AD. Supposons DG quelconque sur le prolongement de BD, et construisons sur DG un rectangle égal à AD; soit ED. Le point E est alors de position connue, et les côtés du rectangle ED sont tous de position et de grandeur connues.

18v Construisons ensuite une hyperbole passant par E, / et qui ne rencontre ni GD, ni DO; soit la section EH. Elle est de position connue. Construisons une autre hyperbole, de sommet le point A, d'axe AB, et dont les deux côtés droit et transverse soient égaux à AC. Soit la section AHI. Elle coupe nécessairement l'autre section. Qu'elle la coupe au point H; H est alors de position connue. Menons du point H les deux perpendiculaires HK et HL. Elles sont donc de position et de grandeur connues, et le rectangle HD est égal à ED, qui est lui-même égal à AD. Ajoutons DK communément aux deux. Le rectangle HB est alors égal à AM, et leurs côtés sont inversement proportionnels, ainsi que les carrés de leurs côtés. Mais le rapport du carré de HK au carré de KA est égal au rapport de CK à AK, étant donné la section AHI, ainsi que nous l'avons montré maintes fois. Le rapport du carré de BD au carré de KB est donc égal au rapport de CK à AK. Le solide dont la base est le carré de BD et la hauteur AK est donc égal au solide dont la base est le carré de BK et la hauteur CK. Mais ce dernier solide est égal au cube de BK plus le solide dont la base est le carré de BK, et la hauteur BC, lequel est égal au nombre donné de carrés. Mais le premier solide est égal au solide dont la base est le carré de BD et la hauteur AB, lequel nous avons construit égal au nombre donné, plus le solide dont la base est le carré de

de I les deux perpendiculaires ID et IN à BM et BC <respectivement>. Elles sont de grandeur et de position connues, et IE est égale à EH, qui est égale à EA. Ajoutons EN communément aux deux. AS est donc égal à IB, leurs côtés sont alors inversement proportionnels, et il en est de même pour les carrés de leurs côtés. Mais le rapport du carré de IN au carré de AN est égal au rapport de NC à AN, ainsi qu'on l'a montré maintes fois, étant donné la section LCI. Le rapport du carré de BE au carré de BN est donc égal au rapport de NC à NA .Le solide dont la base est le carré de BE et la hauteur AN est alors égal au solide dont la base est le carré de BN et la hau-
18r teur CN. Mais le premier est égal au solide / limité par le carré de BE et par la hauteur AB, que nous avons construit égal au nombre, plus le solide dont la base est le carré de BE et la hauteur BN, lequel est égal au nombre donné des côtés du cube de BN.

Ajoutons communément aux deux le solide dont la base est le carré de BN et la hauteur BC, lequel est égal au nombre donné des carrés <du côté> du cube de BN.

Il s'ensuit nécessairement que le cube de BN est égal au nombre donné des carrés,[1] plus le nombre donné de ses côtés, plus le nombre donné. Ce qu'il fallait trouver.

Cette espèce ne comporte pas différents cas, et aucun de ses problèmes n'est impossible.

1. De ses carrés.

cette espèce et pour distinguer le possible de l'impossible. La solution de cette espèce a été obtenue par les propriétés du cercle, jointes à celles de l'hyperbole. Ce qu'il fallait démontrer.

Et le problème qui a imposé à l'un des modernes le recours à cette espèce est le suivant:

Diviser dix en deux parties telles que la somme des deux carrés des deux parties, plus le quotient de la division du plus grand par le plus petit, soit égale à soixante-douze. Il a posé l'une des deux parties égale à une chose, et l'autre à dix moins une chose, suivant l'usage des algébristes dans les divisions analogues.

17v Ce procédé / a abouti à un cube plus cinq en nombre plus treize et demi des côtés du même égaux à dix carrés. Dans ce problème précisément, les deux points C et H se situent à l'intérieur du cercle. Cet homme éminent a résolu le problème devant lequel plusieurs illustres <mathématiciens> d'Irak, au nombre desquels Abū Sahl al-Qūhī, s'étaient trouvés impuissants. Et cependant, celui qui l'a résolu, en dépit de son éminence et de sa grande puissance en mathématiques, ne s'avisa pas de ces différents cas, et que dans les problèmes de cette espèce, il y en a d'impossible. Cet homme éminent est Abū al-Jūd ou al-Shannī. Dieu seul le sait.

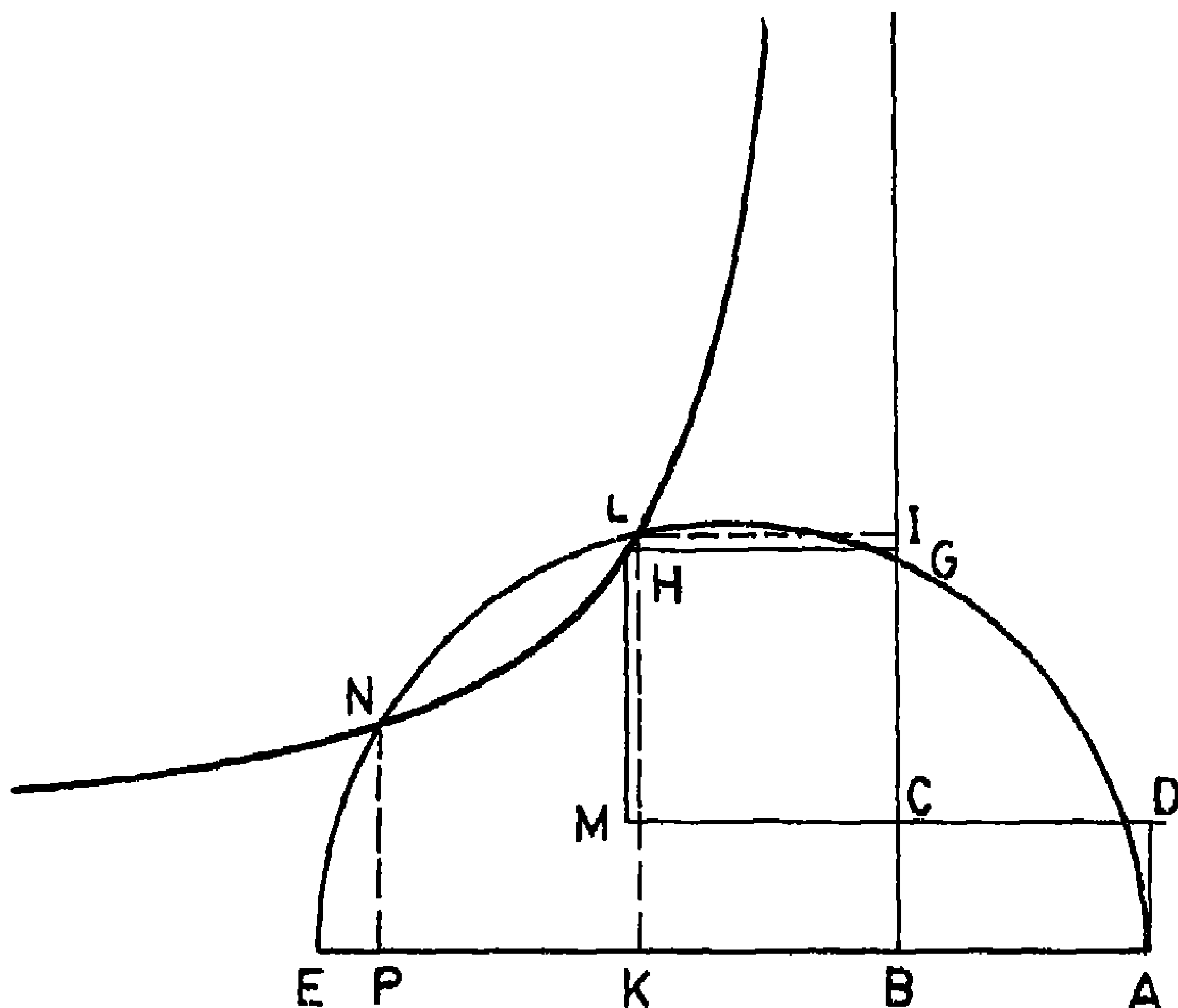
Quatrième espèce des quatre espèces quadrinômes.

Un nombre[1] plus des côtés, plus des carrés, sont égaux à un cube.

Supposons BE égale au côté du carré, qui est égal au nombre des côtés. Construisons un solide dont la base soit le carré de BE, et égal au nombre donné. Soit AB sa hauteur, perpendiculaire à BE. Supposons BC égale au nombre donné des carrés, et sur le prolongement de AB; complétons AE. Menons EM, d'une grandeur quelconque, sur le prolongement de EB. Construisons sur EM, donnée, un rectangle égal à AE, qui est le rectangle EH. Le point H est donc de position connue. Construisons une hyperbole passant par H, et qui ne rencontre ni EM, ni ES; soit HIK. Elle est de position connue. Construisons une autre hyperbole de sommet le point C, dont l'axe soit sur le prolongement de BC, et dont chacun des deux côtés-droit et transverse – soit égal à AC. Soit la section LCI; elle est donc de position connue, et elle coupe nécessairement la section HIK. Qu'elle la coupe au point I; I est donc de position connue. Menons

1. Litt.: nombres.

sommet de la perpendiculaire doit être situé sur le périmètre de la section, dont nous avons dit qu'elle ne peut rencontrer le cercle. Mais c'est impossible.



Puisque cependant nous sommes d'avis que cette induction risque d'être difficile pour certains des lecteurs de ce traité, nous allons renoncer à ce passage et proposer une règle dispensant de cette induction. Construisons un rectangle sur une droite de longueur quelconque, et qui soit sur le prolongement de BC, quelle que soit d'ailleurs la position du point C, à l'extérieur ou à l'intérieur<du cercle>; et de sorte que l'un des angles du rectangle soit au point C, et que le rectangle soit égal au rectangle AC. Ses côtés seront alors de position et de grandeur connues. Construisons ensuite une hyperbole passant par l'angle opposé à l'angle C, et qui ne rencontre ni la droite GC, ni la droite CM, celle-ci étant la perpendiculaire à GC au point C. Si la section rencontre le cercle par contact ou par intersection, alors le problème est possible. Sinon il est impossible. La démonstration de l'impossibilité est celle que j'ai déjà mentionnée.

Un géomètre a eu besoin de cette espèce; il l'a résolue, mais il n'a pas montré les différents cas qu'elle comporte. Il ne lui vint pas à l'idée qu'elle peut comporter des cas impossibles, ainsi que nous l'avons montré. Sache-le, ainsi que la dernière règle pour construire

égal au cube de BK, plus le nombre donné de ses côtés, plus le nombre donné. On a de même le cube de BF par cette démonstration lorsque les deux points C et H se situent à l'intérieur du cercle.

Si H se situe à l'extérieur du cercle et si nous construisons la section, peut-être rencontre-t-elle le cercle par contact ou par intersection. Et la question se ramène à ce que nous avons dit – c'est cette forme de cette espèce que Abū al-Jūd a mentionnée pour déterminer le problème que nous allons rapporter –. Si la section ne rencontre pas le cercle, nous continuons alors à construire le rectangle sur une droite plus courte que GC, ou plus longue qu'elle, relativement au cas précédent. Alors, si la section ne rencontre pas le cercle, le problème est impossible, et la démonstration de son impossibilité se fait par l'inverse de ce que nous avons établi.

Si C se situe sur la circonférence, ou à l'extérieur du cercle,nous prolongeons GC et nous construisons un rectangle dont l'un des angles soit sur C et tel que, si on construit une section suivant la propriété indiquée ci-dessus, passant par l'angle opposé à l'angle C, elle rencontre le cercle par contact ou par intersection. On peut reconnaître cela au moyen d'une induction <fondée> sur peu <de nombres>, et d'une déduction facile,que j'ai omise ici pour que le lecteur de mon traité puisse s'exercer; en effet, celui qui ne serait pas capable de procéder à une telle inférence ne pourrait rien comprendre avec exactitude à ce traité, fondé sur les trois ouvrages que nous avons mentionnés.

Nous démontrons l'impossibilité des cas impossibles par l'inverse de la démonstration que nous avons établie pour les cas possibles. En effet, le côté du cube doit être plus court que EB, qui est le nombre donné de carrés, puisque, s'il était égal au nombre donné de carrés, alors le cube serait égal au nombre donné de carrés,[1] et à plus forte raison quand on lui ajoute autre chose: le nombre, et ses côtés. Si le côté du cube était plus grand que le nombre donné de carrés, le cube lui-même serait alors plus grand que le nombre donné de carrés,[1] et à plus forte raison quand on lui ajoute autre chose.

On a donc démontré que le côté du cube doit être plus petit que
17r BE. Séparons de BE / BF égale au côté du cube; menons de F la perpendiculaire <à BE> jusqu'à la circonférence du cercle, et inversons la démonstration que nous avons établie. Il est évident que le

1. De ses carrés.

Troisième espèce des quatre espèces quadrinômes : un cube plus des côtés plus un nombre[1] sont égaux à des carrés.

Supposons la droite BE égale au nombre donné des carrés, et BC égale au côté d'un carré qui est égal au nombre des côtés, et telle qu'elle soit perpendiculaire à BE. Construisons un solide dont la base soit le carré de BC, et égal au nombre donné. Soit AB sa hauteur, sur le prolongement de BE. Construisons ensuite sur AE le demi-cercle AGE. Le point C ou bien est situé à l'intérieur du cercle, ou bien est situé sur sa circonférence, ou bien il lui est extérieur.

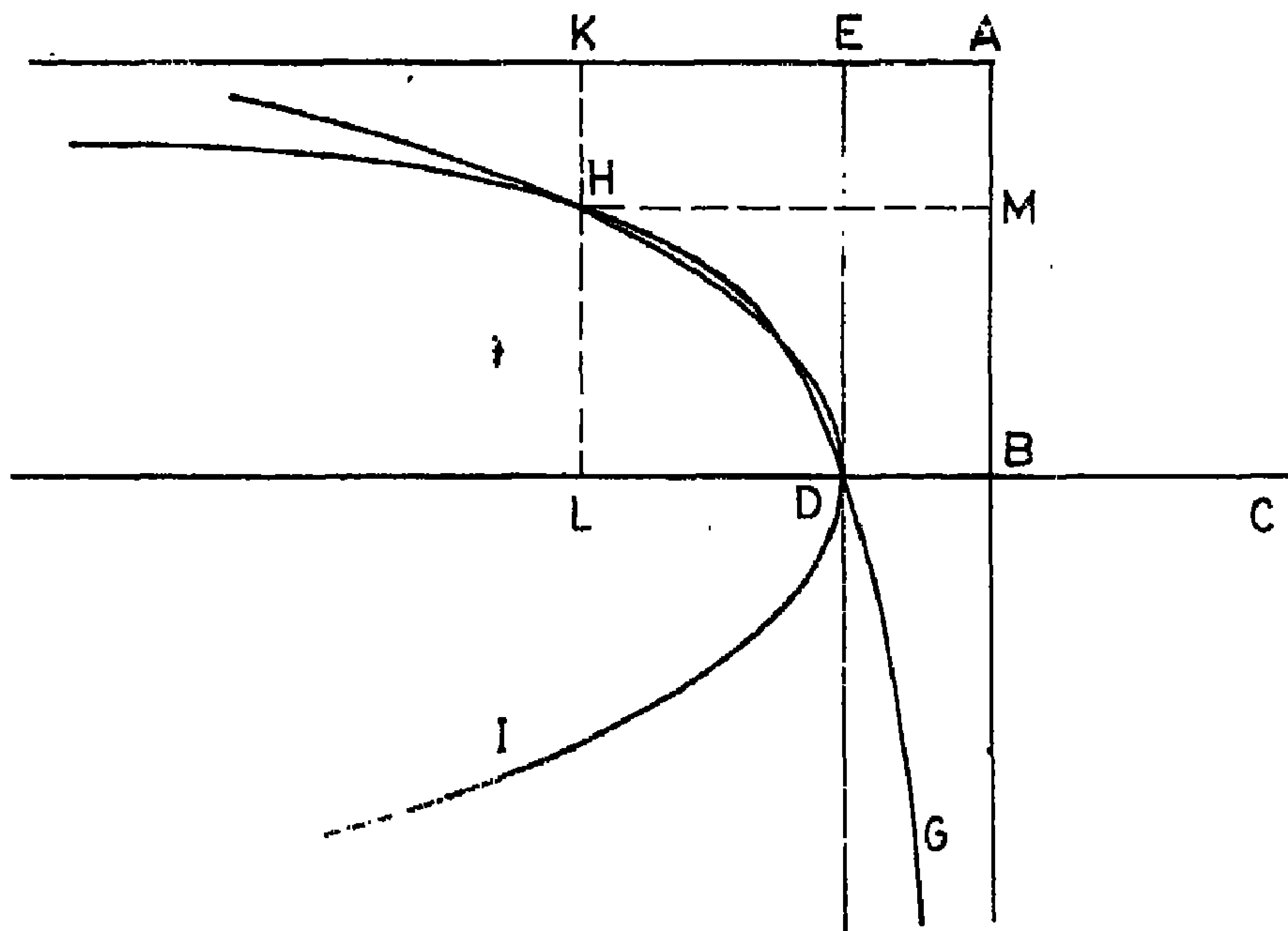
Qu'il soit d'abord situé à l'intérieur du cercle. Prolongeons BC jusqu'à ce qu'elle coupe le cercle au point G, et complétons le rectangle AC. Construisons ensuite sur GC un rectangle égal au rectangle AC, lequel sera CH. Le point H est donc de position connue, puisque le rectangle CH est de grandeur connue, que ses angles sont aussi de grandeur connue, et que la droite GC est de position et de grandeurs connues. Mais ce point H ou bien est situé à l'intérieur du cercle, ou bien est situé sur sa circonférence, ou bien il lui est extérieur. Qu'il soit d'abord situé à l'intérieur du cercle.

Construisons une hyperbole passant par le point H et qui ne rencontre ni GC, ni CM. Dans cette position elle coupe nécessairement le cercle en deux points. Qu'elle le coupe en deux points L et N ; ils sont donc de position connue. Menons de ces deux points les deux perpendiculaires LK et NF sur AE, et du point L la perpendiculaire LI sur BG. Le rectangle LC est alors égal au rectangle CH, et CH est égal à CA. Ajoutons CK communément aux deux ; on a alors DK égal à IK. Leurs côtés sont donc inversement proportionnels, et de même les carrés de leurs côtés. Mais le rapport du carré de LK au carré de KA est égal au rapport de EK à KA, en raison du cercle. Il s'ensuit nécessairement que le rapport du carré de BC au carré de BK est égal au rapport de EK à KA. Le solide dont la base est le carré de BC, et la hauteur KA, est donc égal au solide dont la base est le carré de BK et la hauteur KE. Mais le premier solide est égal au nombre donné des côtés du cube de BK, plus le nombre don-
16v né. /Ajoutons communément <aux deux solides > le cube de BK ; le solide dont la base est le carré de BK, et la hauteur BE, lequel est égal au nombre donné des carrés <du côté> du cube de BK, est donc

1. Litt. : nombres.

reste MD égal à EH. Ajoutons DH communément aux deux. On a alors ML égal à EL. Leurs côtés sont donc inversement proportionnels, et de même le carré de leurs côtés. Le rapport du carré de AB au carré de BL est donc égal au rapport du carré de HL au carré de LD. Mais le rapport du carré de HL au carré de LD est égal au rapport de CL à LD, ainsi que nous l'avons maintes fois montré. Le rapport du carré de AB au carré de BL est alors égal au rapport de CL à LD. Le solide de hauteur LD et de base le carré de AB est donc égal au solide dont la base est le carré de BL et la hauteur LC. Or ce dernier solide est égal au cube de BL plus le solide dont la base est le carré de BL et la hauteur BC qui est égale au nombre donné de carrés. Ajoutons communément <aux deux> le solide dont la base est le carré de AB et la hauteur BD, que nous avons construit égal au nombre donné. Le cube de BL, plus le nombre donné des carrés du même, plus le nombre donné, est donc égal au solide dont la base est le carré de AB et la hauteur BL, que nous avons construit égal au nombre donné des côtés du cube de BL. C'est ce qu'on voulait.

On a donc montré que cette espèce comporte différents cas; peut-être se trouve-t-il dans ses problèmes deux côtés correspondant à deux cubes, et peut-être ceux-ci, je veux dire ses problèmes,
16r en comprennent-ils / d'impossibles. Sa solution a été obtenue par les propriétés de deux hyperboles. C'est ce qu'il fallait démontrer.



égal au nombre donné de carrés. Ajoutons communément <aux deux solides> le solide dont la base est le carré de EB et la hauteur BL, carré qui est égal au nombre des racines. Le solide dont la base est le carré de EB et la hauteur BC, que nous avons construit égal au nombre donné, est donc égal au cube de BL plus le nombre donné de ses côtés, plus le nombre donné des carrés.[1] Ce qu'il fallait démontrer.

Cette espèce ne comporte pas différents cas ; aucun de ses problèmes n'est impossible. Sa solution a été obtenue par les propriétés de l'hyperbole jointes aux propriétés du cercle.

Deuxième espèce des quatre espèces quadrinômes :
Un cube, plus des carrés, plus un nombre,[2] sont égaux à des côtés.

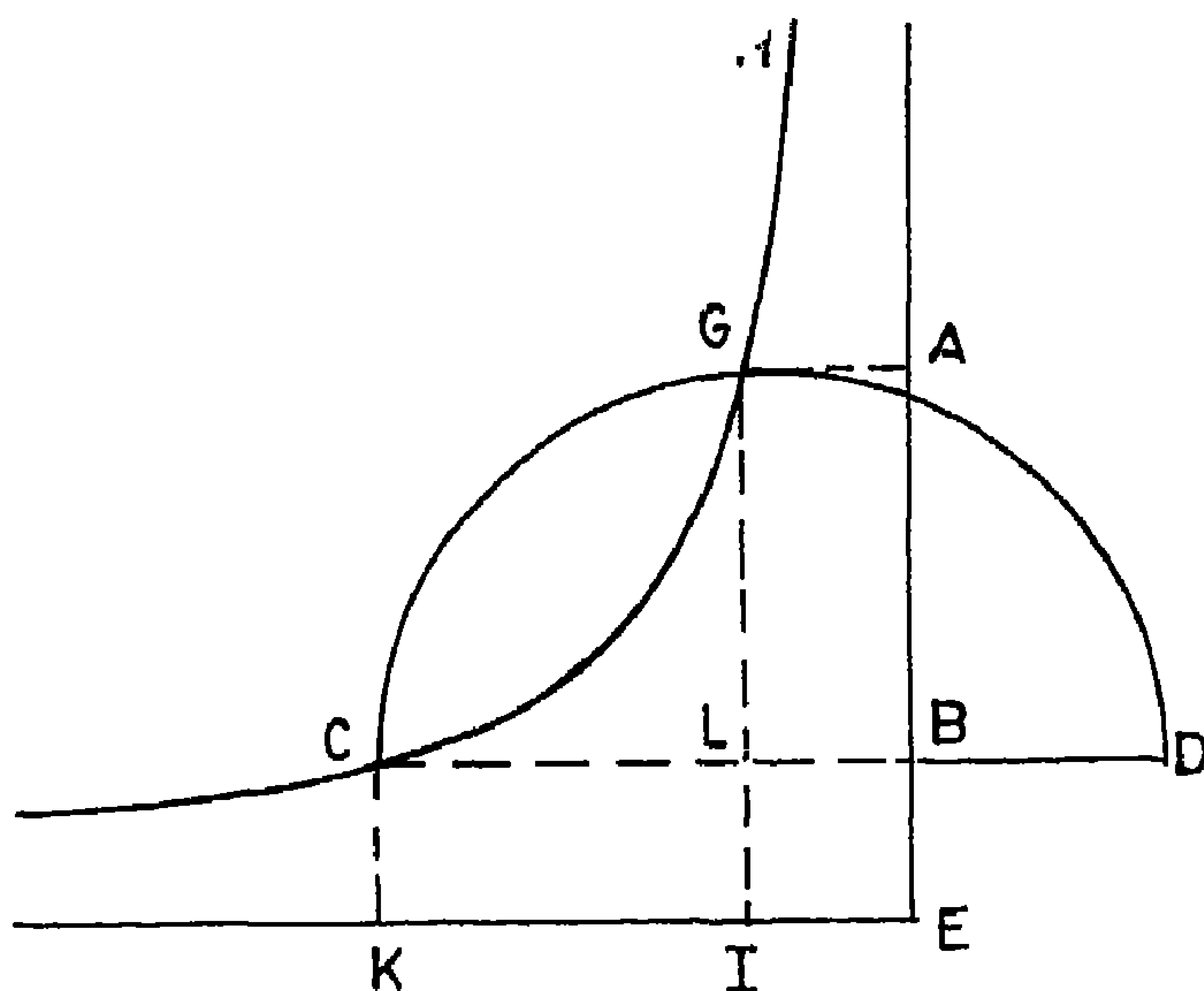
Posons AB côté d'un carré égal au nombre des côtés, et BC égale au nombre donné des carrés, telle qu'elle soit perpendiculaire à AB. Construisons un solide dont la base soit le carré de AB, et qui 15v soit égal au nombre donné. Soit BD sa hauteur / sur le prolongement de BC. Construisons ensuite, après avoir complété le rectangle BE, une hyperbole passant par le point D et qui ne rencontre ni AB, ni AE. Soit la section GDH. Construisons ensuite une autre hyperbole de sommet le point D, dont l'axe soit sur le prolongement de BD, et dont chacun des côtés droit et transverse soit égal à DC. Soit IDH. Il est nécessaire que cette section coupe la première en D. S'il est possible qu'elles se rencontrent en un autre point, le problème est alors possible. Sinon, il est impossible. Cette rencontre par contact ou par intersection en deux points se fonde sur le Livre IV de l'ouvrage des *Coniques*. Or nous avons assuré que nous ne renvoyons qu'aux deux <premiers> livres seulement de cet ouvrage. Ceci toutefois ne nous fait pas tort, du moment qu'elles se rencontrent, que ce soit par contact ou par intersection, comprends bien cela. La rencontre a donc lieu ou bien par contact, ou bien par intersection. Mais si < la première section > coupe < la seconde > en un autre point que D, elle la coupe nécessairement en deux points.

En tous les cas, menons du point d'intersection, ou de rencontre quelle qu'elle soit, disons du point H, les deux perpendiculaires HM et KHL ; elles sont de position et de grandeur connues, puisque le point H est de position connue. Le rectangle AH est donc égal au rectangle AD. Retranchons des deux EM qui leur est commun. Il

1. Littéralement : de ses carrés.

2. Littéralement : nombres.

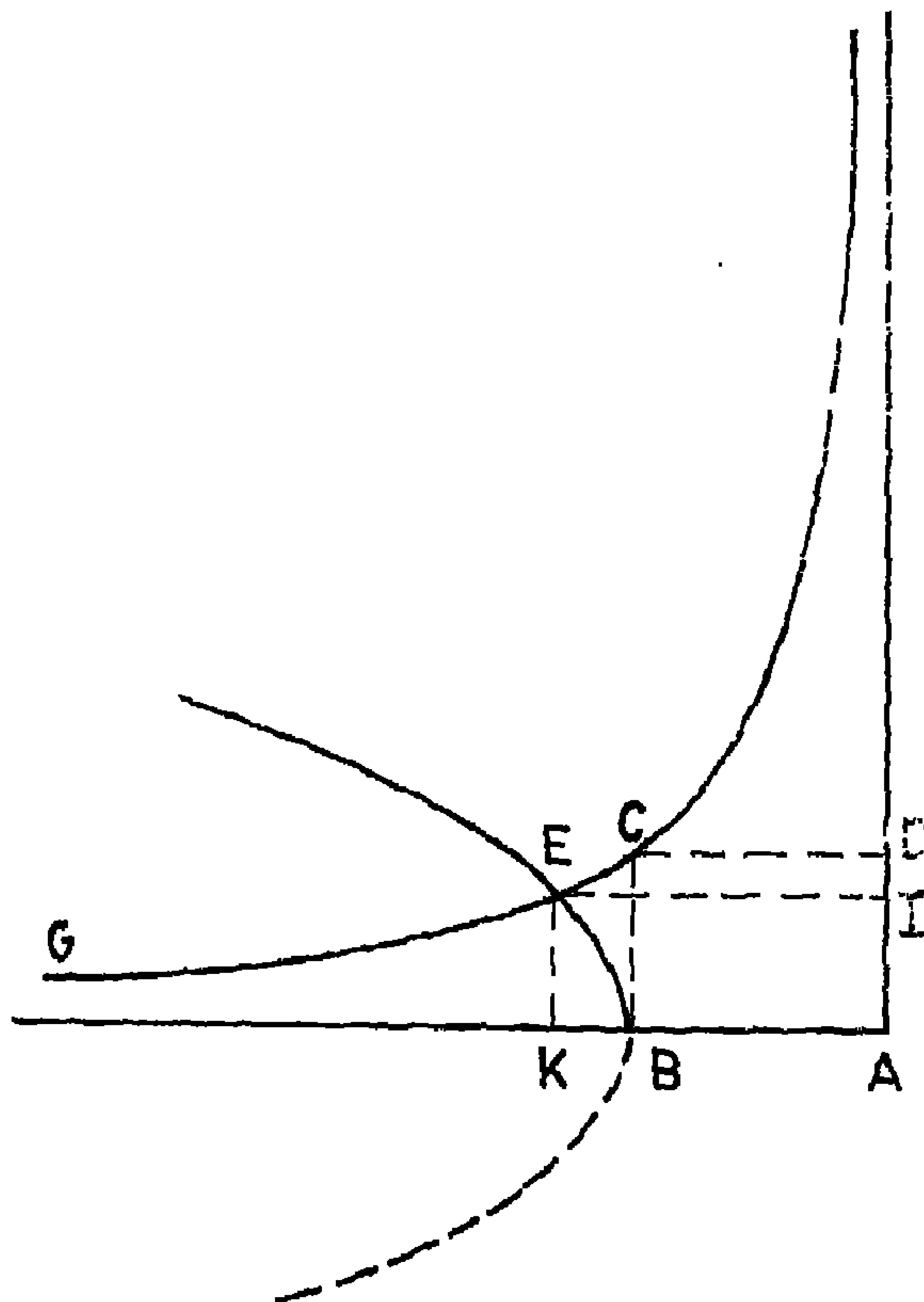
qui soit égal au nombre donné .Soit BC sa hauteur, perpendiculaire à BE. Construisons ensuite BD égale au nombre donné de carrés, sur le prolongement de BC. Construisons enfin sur le diamètre DC un demi-cercle DGC. Complétons le rectangle BK. Construisons une hyperbole de sommet le point C, et qui ne rencontre ni la droite BE, ni la droite EK. Elle coupe alors le cercle en un point C, puisqu'elle coupe la tangente au cercle, CK; il s'ensuit nécessairement qu'elle coupe le cercle en un autre point; qu'elle le coupe en G. Le point G est donc de position connue, puisque le cercle et la section sont de
15r position connue. Menons de G / les deux perpendiculaires GI et GA sur EK et EA respectivement. Le rectangle GE est donc égal au rectangle BK. Retranchons en EL, commun aux deux; il reste le rectangle GB égal au rectangle LK. Le rapport de GL à LC est donc égal au rapport de EB à BL, puisque EB est égale à IL. De même leurs carrés sont alors proportionnels. Mais le rapport du carré de GL au carré de LC est égal au rapport de DL à LC, en raison du cercle.[1] Le rapport du carré de EB au carré de BL est donc égal au rapport de DL à LC. Le solide dont la base est le carré de EB et la hauteur LC est donc égal au solide dont la base est le carré de BL, et la hauteur DL. Mais ce dernier solide est égal au cube de BL plus le solide dont la base est le carré de BL, et la hauteur BD, lequel est



1. En raison de l'équation du cercle, ou plus précisément de la puissance d'un point par rapport au cercle.

solide dont la base est le carré de AK et la hauteur AB, et qui est égal au nombre donné des carrés; le cube de AK est donc égal au nombre donné des carrés du même, plus le nombre donné.

Cette espèce ne comporte pas différents cas, et aucun de ses problèmes n'est impossible. Sa solution a été obtenue par les propriétés de deux sections, parabole et hyperbole à la fois.



< Equations quadrinômes du troisième degré - 1 >

Après avoir ainsi terminé les espèces trinômes, traitons des quatre espèces quadrinômes, dont chacune est composée de trois < termes > égaux à un < terme > .

Première espèce des quatre espèces quadrinômes:

Un cube plus des carrés, plus des côtés sont égaux à un nombre.[1]

Posons BE côté d'un carré qui est égal au nombre donné de côtés, et construisons un solide dont la base soit le carré de BE, et

1. Litt.: nombres.

dont la base est le carré de GC, et la hauteur AC, égale au nombre donné de carrés. C'est ce qu'on voulait. Et on procède d'une manière analogue pour les deux autres figures, si ce n'est que dans la troisième on obtient nécessairement deux cubes, puisque chaque perpendiculaire sépare de CA le côté d'un cube, ainsi qu'on l'a montré.

14r On a donc montré que cette espèce comporte / différents cas, dont certains peuvent comprendre des problèmes impossibles. Sa solution a été obtenue par les propriétés de deux sections, parabole et hyperbole à la fois.

Sixième espèce des six espèces trinômes qui restent:
Un cube est égal à des carrés plus un nombre.[1]

Supposons que le nombre des carrés soit la droite AB, et construisons un solide de hauteur AB, dont la base soit un carré, et tel qu'il soit égal au nombre donné.

Soit BC le côté de sa base, perpendiculaire à AB; complétons le rectangle DB. Construisons ensuite une hyperbole, passant par le point C de position connue, et qui ne rencontre ni AB, ni AD. Soit la section CEG. Construisons de même une autre section, une parabole dont le sommet soit le point B, dont l'axe soit sur le prolongement de AB, et dont le côté droit soit AB. Soit BEH. Or, ces deux sections se coupent nécessairement. Qu'elles se coupent au point E. Le point E est alors de position connue. De ce point, menons les deux perpendiculaires EI et EK sur AD et AB <respectivement>. Le rectangle EA est alors égal au rectangle CA. Le rapport de AK à BC est donc égal au rapport de AB à EK, et leurs carrés sont eux aussi proportionnels. Mais le carré de EK est égal au produit de KB par AB, puisque EK est une ordonnée de la section BEH. Le rapport du carré de AB au carré de EK est donc égal au rapport de AB à BK.
14v Le rapport / du carré de BC au carré de AK est alors égal au rapport de BK à AB. Le solide dont la base est le carré de BC, et la hauteur AB, est alors égal au solide dont la base est le carré de AK, et la hauteur KB, étant donné que les deux hauteurs et les deux bases sont inversement proportionnelles. Ajoutons communément aux deux le solide dont la base est le carré de AK, et la hauteur AB. Le cube de AK est alors égal au solide dont la base est le carré de BC, et la hauteur AB, et que nous avons construit égal au nombre donné; plus le

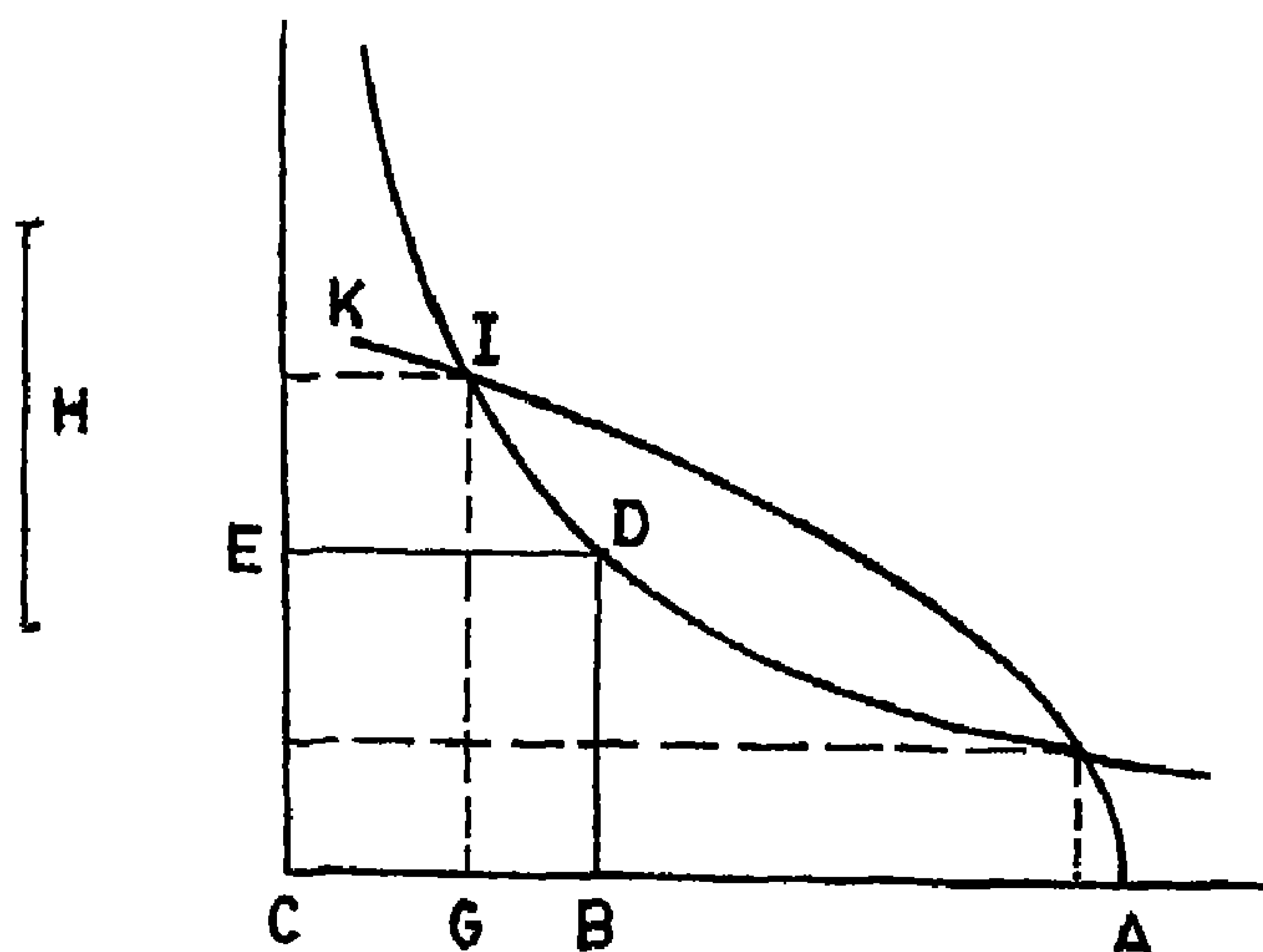
1. Litt.: nombres.

13v en un autre point soit par contact, / soit par intersection, la perpendiculaire abaissée de ce point tombe nécessairement entre les deux points *A* et *B*, et le problème est possible; sinon il est impossible.

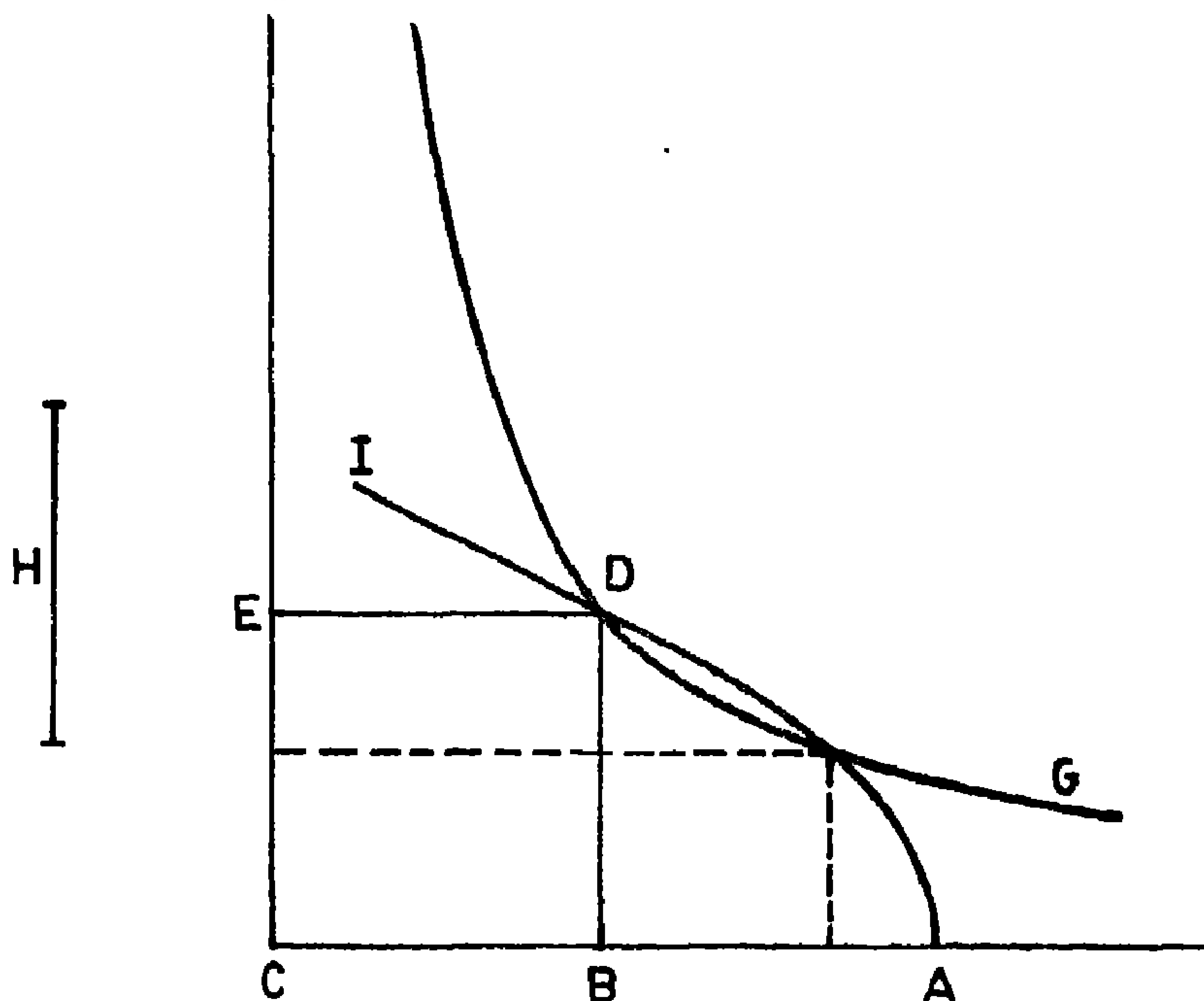
Ce contact, ou cette intersection, l'éminent géomètre Abū al-Jūd ne les a pas saisis, en sorte qu'il trancha en jugeant que, si *BC* est plus grande que *AB*, alors le problème est impossible; il se trouve ici réfuté dans son jugement. C'est aussi de cette espèce, parmi les six espèces, qu'a eu besoin al-Mahānī, sache-le.

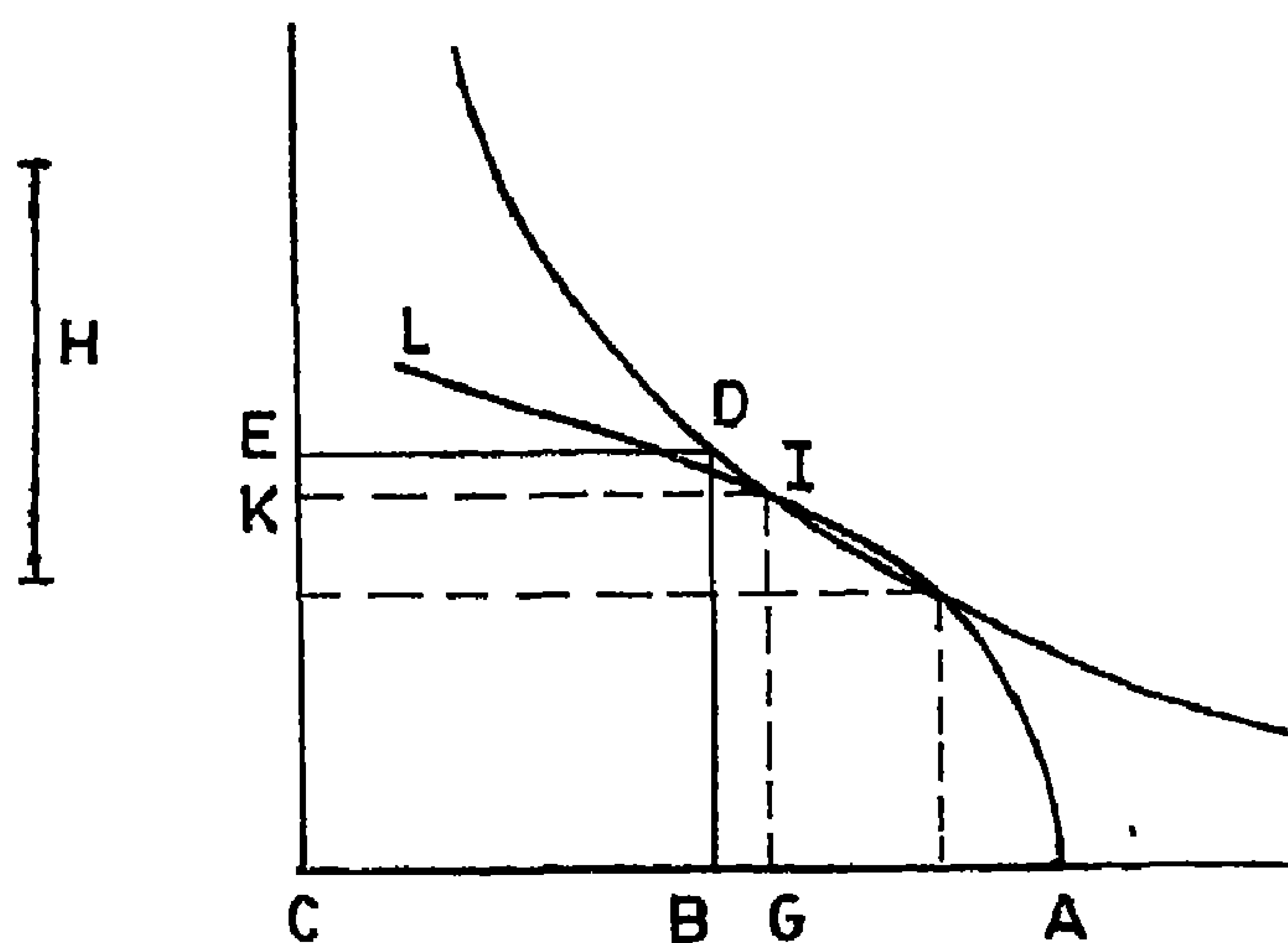
Dans la troisième figure, le point *D* est à l'intérieur de la parabole, et les sections se coupent en deux points.

Dans tous les cas, menons du point de rencontre une perpendiculaire sur *AB*. Soit *IG* dans la seconde figure. Menons de même une autre perpendiculaire de ce point sur *CE*; soit *IK*. Le rectangle *IC* est donc égal au rectangle *DC*; le rapport de *GC* à *BC* est alors égal au rapport de *BC* à *IG*; mais *IG* est une ordonnée de la section *AIL*. Son carré est donc égal au produit de *AG* par *BC*. Le rapport de *BC* à *IG* est alors égal au rapport de *IG* à *GA*. Les quatre droites sont donc en proportion: le rapport de *GC* à *CB* est égal au rapport de *CB* à *IG*, et au rapport de *IG* à *GA*. Le rapport du carré de *GC*, la première, au carré de *BC*, la seconde, est donc égal au rapport de *BC*, la seconde, à *GA*, la quatrième. Le cube de *BC*, lequel est égal au nombre donné, est donc égal au solide dont la base est le carré de *GC*, et la hauteur *GA*. Ajoutons le cube de *GC* communément aux deux; le cube de *GC* plus le nombre donné est alors égal au solide



par le point D, puisque le carré de DB est égal au produit de AB par BC. D est donc sur le périmètre de la parabole; et la parabole rencontre l'hyperbole en un autre point, ce que tu peux savoir au moindre examen. Dans la deuxième figure, le point D est à l'extérieur du périmètre de la parabole, puisque le carré de DB est plus grand que le produit de AB par BC; alors, si les deux sections se rencontrent





Le cube de BG plus le nombre donné des carrés du même est donc égal au nombre donné. Ce qu'il fallait démontrer.

Cette espèce ne comporte pas différents cas, et aucun de ses problèmes n'est impossible. Sa solution a été obtenue par les proprié-
13r tés de deux sections, parabole et hyperbole à la fois. /

Cinquième espèce des six espèces trinômes qui restent: Un cube plus un nombre sont égaux à des carrés.[2]

Supposons AC le nombre des carrés; construisons un cube égal au nombre donné, et de côté H; la droite H ne manquera pas d'être égale à la droite AC, ou plus grande qu'elle, ou plus petite. Si elle lui est égale, le problème est impossible, puisque le côté du cube cherché ne laissera pas d'être égal à H, ou plus petit, ou plus grand .Or, si elle lui est égale, le produit de AC par le carré de ce côté sera donc égal au cube de H. Le nombre sera donc égal au nombre des carrés, et on n'aura pas besoin d'y ajouter le cube. Si le côté cherché est plus petit que H, le produit de AC par le carré de ce côté sera plus petit que le nombre donné. Le nombre des carrés sera alors plus petit que le nombre donné, et à plus forte raison lorsqu'on ajoute un surplus à ce dernier.

Enfin, si le côté est plus grand que H, son cube sera plus grand que le produit de AC par son carré, et à plus forte raison lorsqu'on ajoute le nombre au cube. Puis, si H est plus grande que AC, l'impossibilité dans les trois cas est alors plus contraignante.

Il est donc nécessaire que H soit plus petite que AC, sinon le problème est impossible.

Séparons BC, égale à H, de AC. La droite BC est égale à AB, ou plus grande qu'elle, ou plus petite. Qu'elle lui soit égale dans la première figure, qu'elle soit plus grande qu'elle dans la deuxième, et plus petite qu'elle dans la troisième. Complétons dans les trois figures le carré DC. Construisons une hyperbole passant par D, et qui ne rencontre ni AC, ni CE. Soit DG dans la première figure, DI dans la deuxième et dans la troisième.

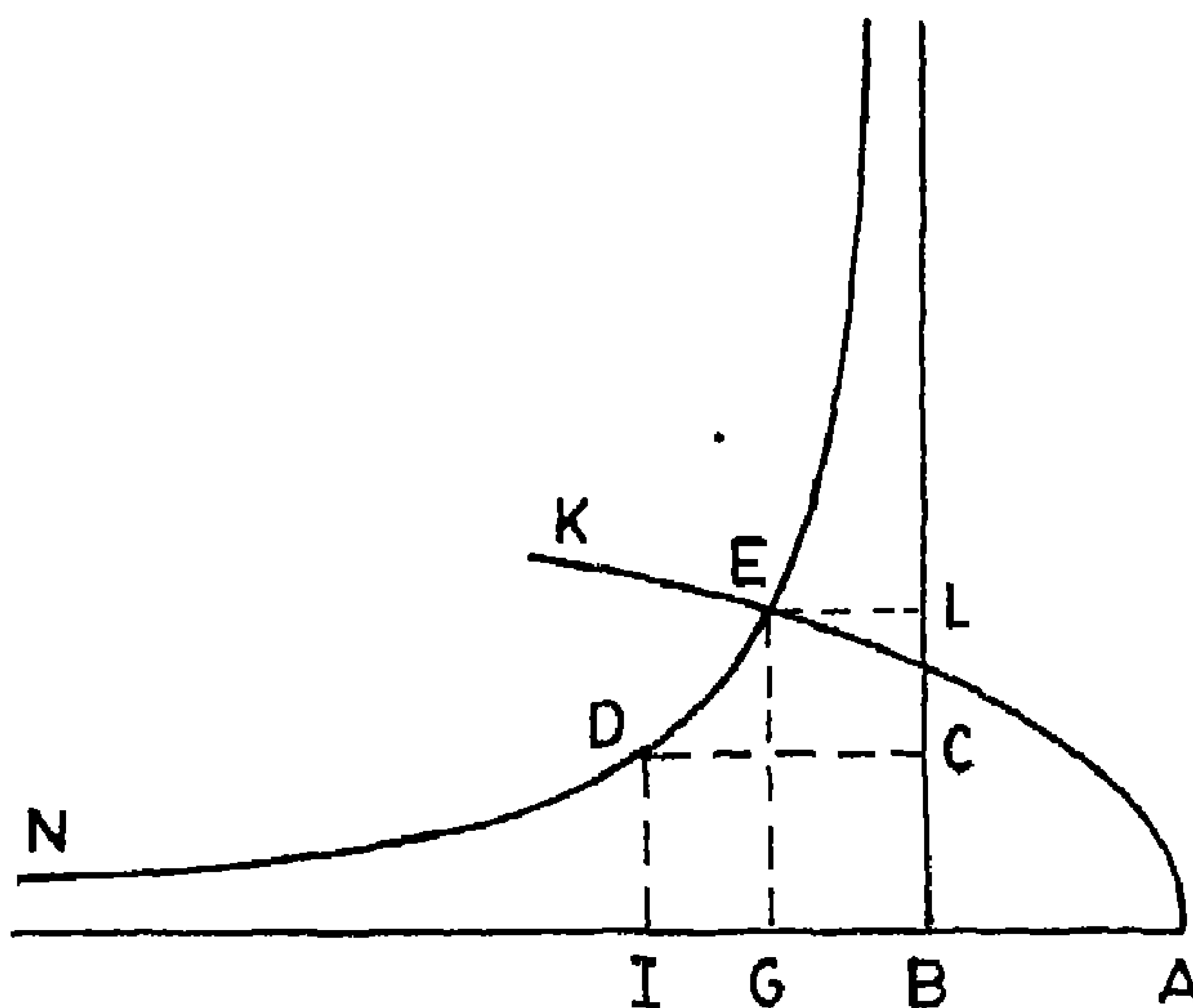
Construisons ensuite une parabole de sommet le point A, d'axe AC, et dont le côté droit soit BC; soit AI dans la première figure, AL dans la deuxième, et AK dans la troisième. Les deux sections sont de position connue. Dans la première figure, la parabole passe

2. Litt.: carré.

Qu'elle tombe sur I, si c'était possible. Son carré serait alors égal au produit de AI par IB, laquelle est égale à BC. Mais cette perpendiculaire est égale à la perpendiculaire DI; le carré de ID serait donc égal au produit de AI par IB; il est par ailleurs égal au produit de BI par lui-même. Or, c'est impossible. La perpendiculaire ne tombe donc par sur I. Elle ne tombe pas non plus au-delà de I, puisqu'elle serait alors plus courte que ID, et que cette impossibilité serait encore plus contraignante.

Nécessairement la perpendiculaire tombe donc sur un point situé entre A et I, ainsi que le fait EG, par exemple. Or le carré de EG est égal au produit de AG par BC; le rapport de AG à EG est donc égal au rapport de EG à BC, et le rectangle EB est égal au rectangle DB, ainsi que c'est montré dans la proposition 8 [1] du Livre II des *Coniques*. Le rapport de EG à BC est donc égal au rapport de BC à BG; les quatre droites AG, EG, BC, et BG sont alors en proportion.

Le rapport du carré de BG, la quatrième, au carré de BC, la troisième est donc égal au rapport de BC, la troisième, à AG, la première. Le cube deBC, que nous avons construit égal au nombre donné, est donc égal au solide dont la base est le carré de BG, et la hauteur AG. Or ce solide ,dont la base est le carré de BG et la hauteur AG, est égal au cube de BG plus le solide dont la base est le carré de BG, et la hauteur AB. Mais dans ce dernier solide, dont la base est le carré de BG, la hauteur AB est égale au nombre donné de carrés.



1. Il s'agit de la proposition 12 du même livre.

port du carré de *AB*, la première, au carré de *HB*, la seconde, est
12r alors égal au rapport de *HB*, la seconde, à *CH*, / la quatrième. Le cube de *HB* est donc égal au solide dont la base est le carré de *AB* et la hauteur *CH*, puisque leurs hauteurs sont inversement proportionnelles à leurs bases. Mais ce solide est égal au solide dont la base est le carré de *AB*, et la hauteur *BC*, lequel nous avons construit égal au nombre donné, plus le solide délimité par une base égale au carré de *AB*, et une hauteur *BH*, lequel est égal au nombre donné des côtés du cube de *BH*. Le cube de *BH* est donc égal au nombre donné, plus le nombre donné de ses côtés. Et c'est ce qu'on voulait.

On a montré que cette espèce ne comporte pas différents cas, et qu'elle – je veux dire ses problèmes – ne comprend rien d'impossible. Sa solution a été obtenue par les propriétés de deux sections, une parabole et une hyperbole à la fois.

Quatrième espèce des espèces trinômes: Un cube plus des carrés sont égaux à un nombre.

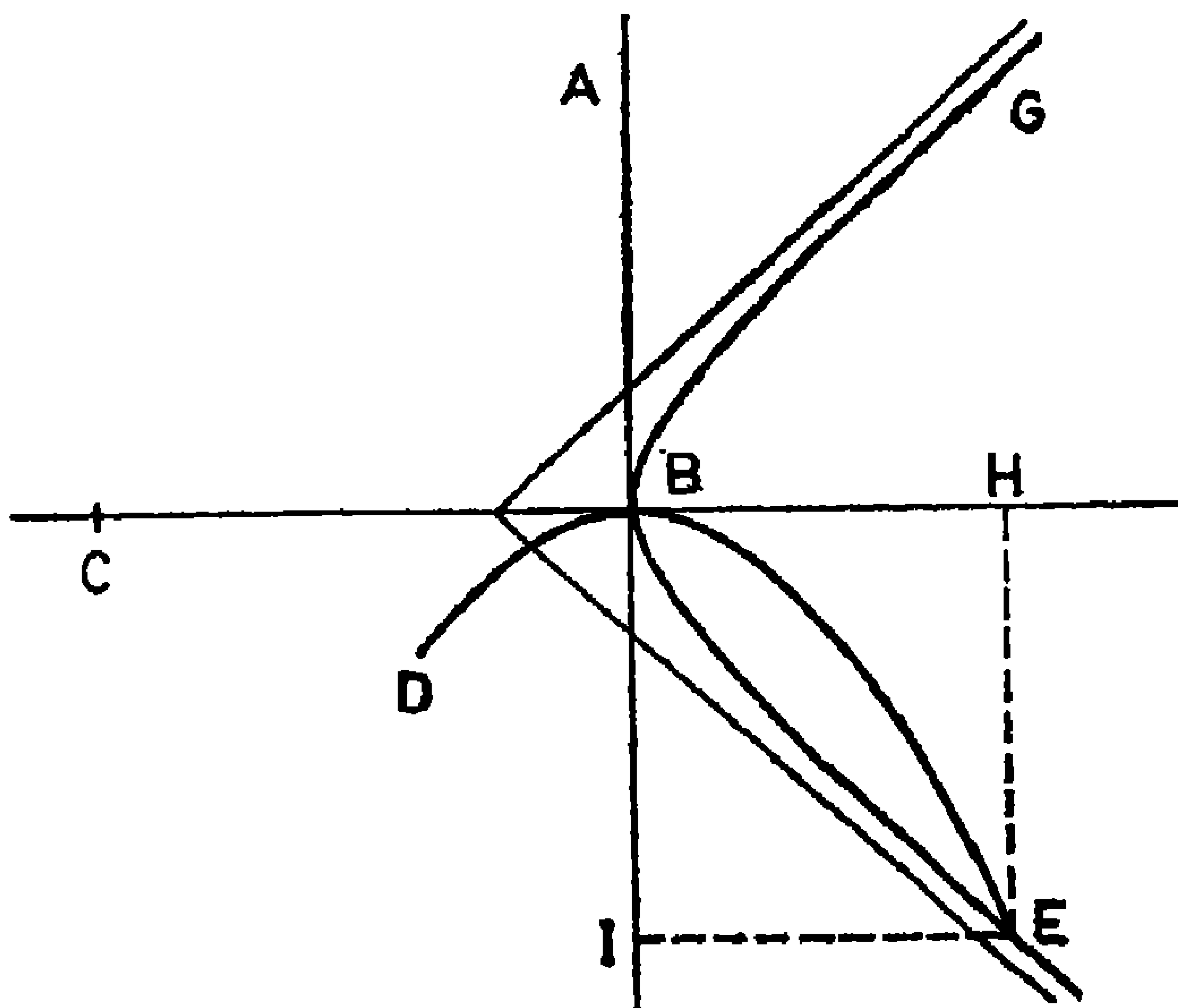
Posons la droite *AB* égale au nombre des carrés, et construisons un cube égal au nombre donné. Soit *H* son côté. Prolongeons *AB*; traçons *BI* égale à *H*, et complétons le carré *BIDC*. Construisons une hyperbole passant par le point *D*, et qui ne rencontre ni *BC* ni *BI*. Soit la section *EDN*, comme on l'a montré en vertu des deux propositions 4 et 5 du Livre II, et de la proposition 59 [1] du Livre I < des *Coniques* >.

La section *EDN* est donc de position connue, puisque le point *D* est de position connue, et que les deux droites *BC* et *BI* sont de position connue. Construisons ensuite une parabole de sommet le point *A*, d'axe *AI* et dont le côté droit soit *BC*; soit la section *AK*; la section *AK* est donc de position connue. Les deux sections se coupent nécessairement; qu'elles se coupent au point *E*. Le point *E* est alors de position connue. Menons de ce point les deux perpendiculaires *EG* et *EL* sur *AI* et *BC* <respectivement>. Elles sont
12v de position et de grandeur connues. Or je dis qu'il est impossible / que la section *AEK* coupe la section *EDN* en un point tel que la perpendiculaire abaissée de ce point sur la droite *AI* tombe au point *I* ou au-delà de *I*.

1. Il s'agit des propositions I-55, II-4 et II-5. Les propositions I-55 et II-4 semblent cependant suffire. Cette remarque vaut chaque fois qu'al-Khayyām cite ces trois propositions.

au nombre donné; que sa hauteur BC soit perpendiculaire à AB. Prolongeons AB et BC, construisons une parabole de sommet B, d'axe sur le prolongement de AB et dont le côté droit soit AB; soit DBE. Elle est de position connue, et elle est tangente à la droiteBC, ainsi que l'a montré Apollonius dans la proposition 33 [1] du Livre I.

Construisons une autre section, une hyperbole, de sommet le point B, d'axe sur le prolongement de BC, et dont chacun des côtés droit et transverse soit égal à BC. Soit la section GBE. Elle est de position connue, et elle est tangente à la droite AB. Les deux sections se coupent nécessairement. Qu'elles se coupent au point E. Le point E est alors de position connue. Menons du point E les deux perpendiculaires EI et EH; elles sont de position et de grandeur connues. Or la droite EH est une ordonnée, et, selon ce qui précède, son carré est égal au produit de CH par BH. Le rapport de CH à EH est donc égal au rapport de EH à HB, mais le rapport de EH, qui est égale à BI, à HB, qui est égale à EI qui, quant à elle, est une ordonnée de l'autre section, est égal au rapport de EI à AB, laquelle est le côté droit de la section <parabole>. Les quatre droites sont donc en proportion: le rapport de AB à HB est donc égal au rapport de HB à BI et au rapport de BI à CH. Par conséquent le rap-



1. Il s'agit de la proposition 32, *op. cit.*

vertical, et le transverse, – sont égaux .Le carré de EI est donc égal au produit de BI par IC. Le rapport de BI à IE est alors égal au rapport de IE à IC. Mais le carré de EH, laquelle est égale à BI,est égal au produit de BH par BA, ainsi que c'est montré dans la proposition 12 du Livre I de l'ouvrage des *Coniques*. Le rapport de AB à BI est donc égal au rapport de BI à BH, et au rapport de BH, laquelle est égale à EI, à IC. Les quatre droites sont donc en proportion. Le rapport du carré de AB, la première, au carré de BI, la seconde, est donc égal au rapport de BI, la seconde, à IC, la quatrième.

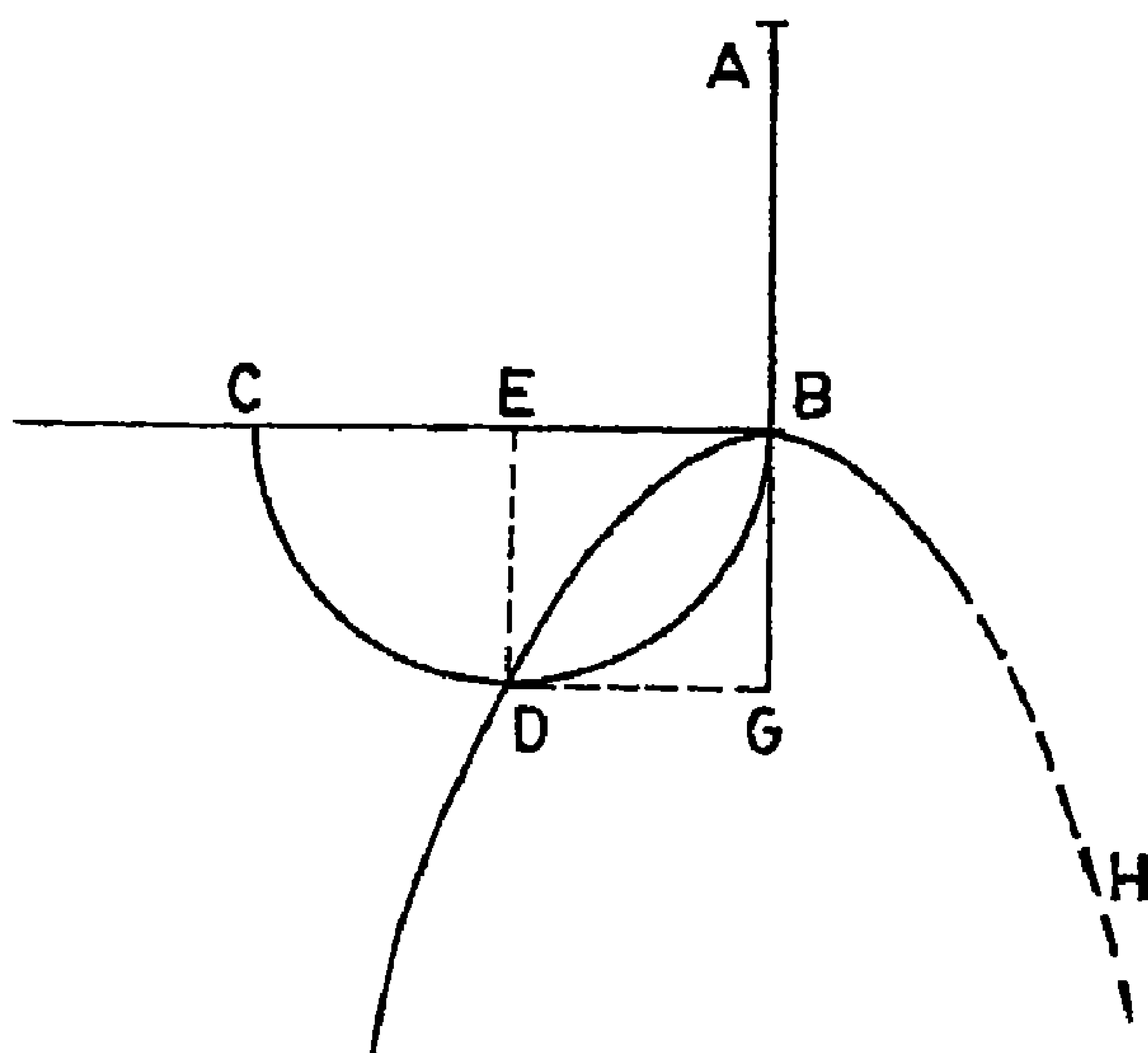
Le cube de BI est donc égal au solide dont la base est le carré de AB, et dont la hauteur est CI.

Ajoutons communément aux deux le solide dont la base est le carré de AB et la hauteur BC, que nous avons construit égal au nombre donné; le cube de BI plus le nombre donné sera donc égal au sollide dont la base est le carré de AB et la hauteur BI, lequel est égal
11v au nombre des côtés du cube./

On a montré que cette espèce comporte différents cas, et qu'elle comprend des problèmes impossibles. Sa solution à été obtenue par les propriétés de deux sections, la parabole et l'hyperbole.

Troisième espèce: Un cube est égal à des côtés plus un nombre.

Posons AB le côté d'un carré égal au nombre des côtés, et construisons un solide dont la base soit le carré de AB, et qui soit égal



Deuxième espèce des six espèces trinômes.

Un cube plus un nombre sont égaux à des côtés.

11r Supposons AB le côté d'un carré égal au nombre / des racines, et construisons un solide dont la base soit le carré de AB, et qui soit égal au nombre donné. Soit BC sa hauteur, perpendiculaire à AB; construisons une parabole de sommet le point B, d'axe sur le prolongement de AB, et dont le côté droit soit AB. Soit DBE. Elle est de position connue. Construisons une seconde section, une hyperbole de sommet le point C, d'axe sur le prolongement de BC, et dont chacun des deux côtés droit et transverse soit égal à BC; soit ECG. Elle est de position connue, ainsi que l'a montré Apollonius dans la proposition 58[1] du Livre I. Ces deux sections se rencontrent ou ne se rencontrent pas. Si elles ne se rencontrent pas, le problème est impossible. Mais si elles se rencontrent, soit par contact en un point soit par intersection en deux points, alors le point de rencontre sera de position connue. Qu'elles se rencontrent au point E; menons de E les deux perpendiculaires EI et EH sur BI et BH <respectivement>. Les deux perpendiculaires sont donc nécessairement de position et de grandeur connues. Mais la droite IE est une ordonnée. Le rapport du carré de IE au produit de BI par IC est alors égal au rapport du côté droit au côté transverse, ainsi que l'a montré Apollonius dans la proposition 20[2] du Livre I. Or les deux côtés – le droit,

1. Il s'agit de la proposition 54. Voir *Les Coniques d'Apollonius de Perge*, traduction P. Ver Eecke, Paris 1963.

2. Il s'agit de la proposition 21, *op. cit.*

nombre donné, selon la construction que nous avons montrée précédemment. Traçons BC perpendiculaire à AB. Tu sais d'ailleurs ce que signifie le nombre solide dans nos propos : c'est un solide dont la base est le carré de l'unité, et dont la hauteur est égale au nombre donné, je veux dire à une droite dont le rapport au côté de la base du solide est égal au rapport du nombre donné à l'unité.

Prolongeons AB jusqu'à G, et construisons une parabole de sommet le point B, d'axe BG et de côté droit AB. Soit la section
10v HBD./La section HBD sera donc de position connue, ainsi que nous l'avons montré ci-dessus, et elle sera tangente à la droite BC. Construisons sur BC un demi-cercle. Il coupera nécessairement la section ; qu'il la coupe au point D. Menons de D, qui est de position connue, comme tu le sais, les deux perpendiculaires DG et DE sur BG et BC < respectivement >.

Elles seront donc de grandeur et de position connues. La droite DG est une ordonnée de la section. Son carré est donc égal au produit de BG par AB. Le rapport de AB à DG, laquelle est égale à BE, est donc égal au rapport de BE à ED, laquelle est égale à GB. Mais le rapport de BE à ED est égal au rapport de ED à EC. Les quatre droites AB, BE, ED, et EC, sont donc en proportion ; par conséquent le rapport du carré de AB – la première – au carré de BE – la seconde – est égal au rapport de BE – la seconde – à EC – la quatrième. Le solide, dont la base est le carré de AB, et la hauteur EC, est donc égal au cube de BE, puisque leurs hauteurs sont inversement proportionnelles à leurs bases.

Ajoutons communément aux deux le solide dont la base est le carré de AB et la hauteur EB ; le cube de BE plus ce solide sont donc égaux au solide dont la base est le carré de AB et la hauteur BC, solide que nous avons supposé égal au nombre donné. Mais le solide dont la base est le carré de AB, égal au nombre des racines, et la hauteur EB, égale au côté du cube, est égal au nombre donné des côtés du cube de EB. Le cube de EB plus le nombre donné de ses côtés est donc égal au nombre donné. Et c'est ce qu'on voulait.

Cette espèce ne comporte ni différents cas, ni problèmes impossibles. < Sa solution > a été obtenue[1] par les propriétés du cercle jointes à celles de la parabole.

1. Littéralement : "Elle a été déterminée...". Nous conserverons cette traduction jusqu'à la fin du texte.

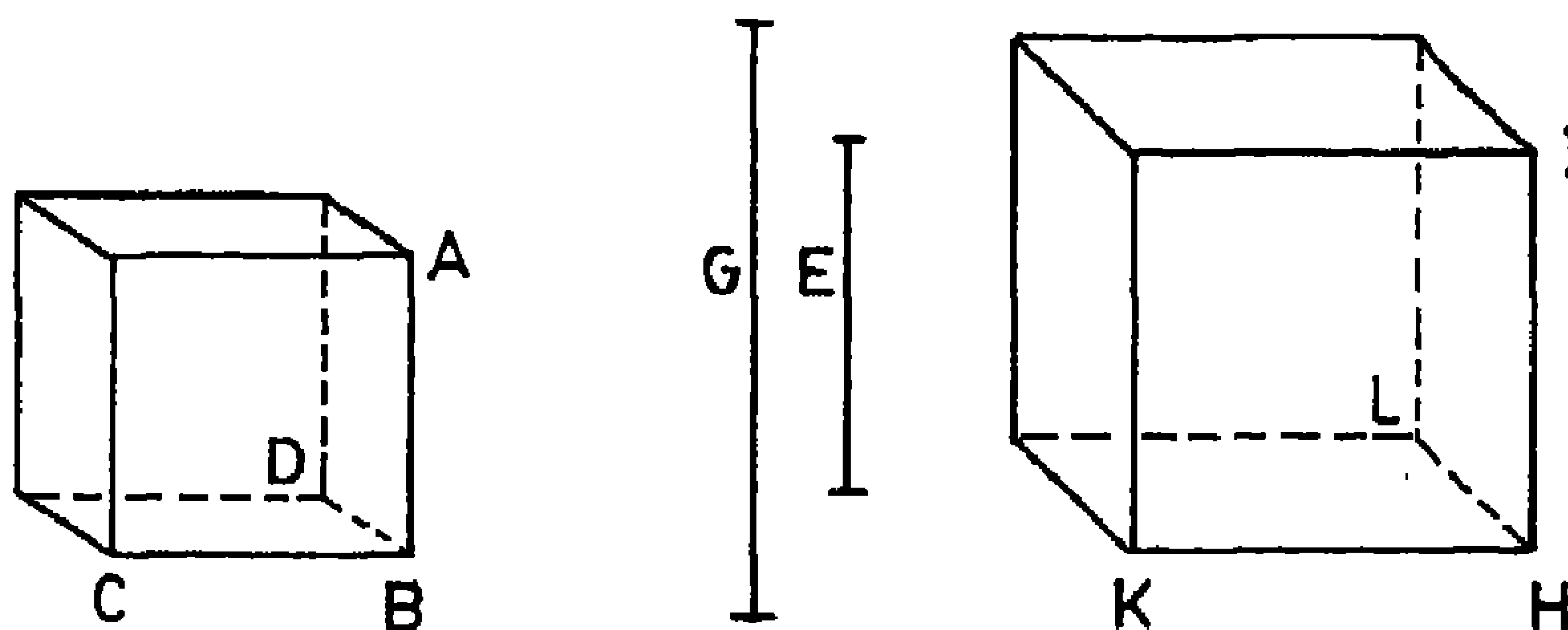
Présentons ensuite la troisième espèce de binômes:

10r "Un cube est égal à un nombre". /

Posons le nombre égal au solide *ABCD*, dont la base *AC* est, comme nous l'avons dit, le carré de l'unité, et dont la hauteur est égale au nombre donné. Construire un cube qui lui soit égal.

Prenons entre les deux droites *AB* et *BD*, deux droites moyennes dans la proportion; elles seront de grandeur connue, comme nous l'avons montré. Soient *E* et *G*. Faisons *HI* égale à la droite *E*; construisons sur *HI* un cube *IHKL*. Ce cube est alors de grandeur connue et son côté est de grandeur connue. Je dis que ce cube est égal au solide *D*.

Démonstration: Le rapport du carré *AC* au carré *IK* est égal au produit du rapport de *AB* à *HK* par lui-même. Le produit du rapport de *AB* à *HK* par lui-même est égal au rapport de *AB* à *G* – de la première à la troisième des quatre droites – mais il est encore égal au rapport de *HK*, la deuxième, à *BD*, la quatrième. Les bases du cube *L* et du solide *D* sont donc inversement proportionnelles à leurs hauteurs. Le cube et le solide sont donc égaux. Ce qu'il fallait démontrer.

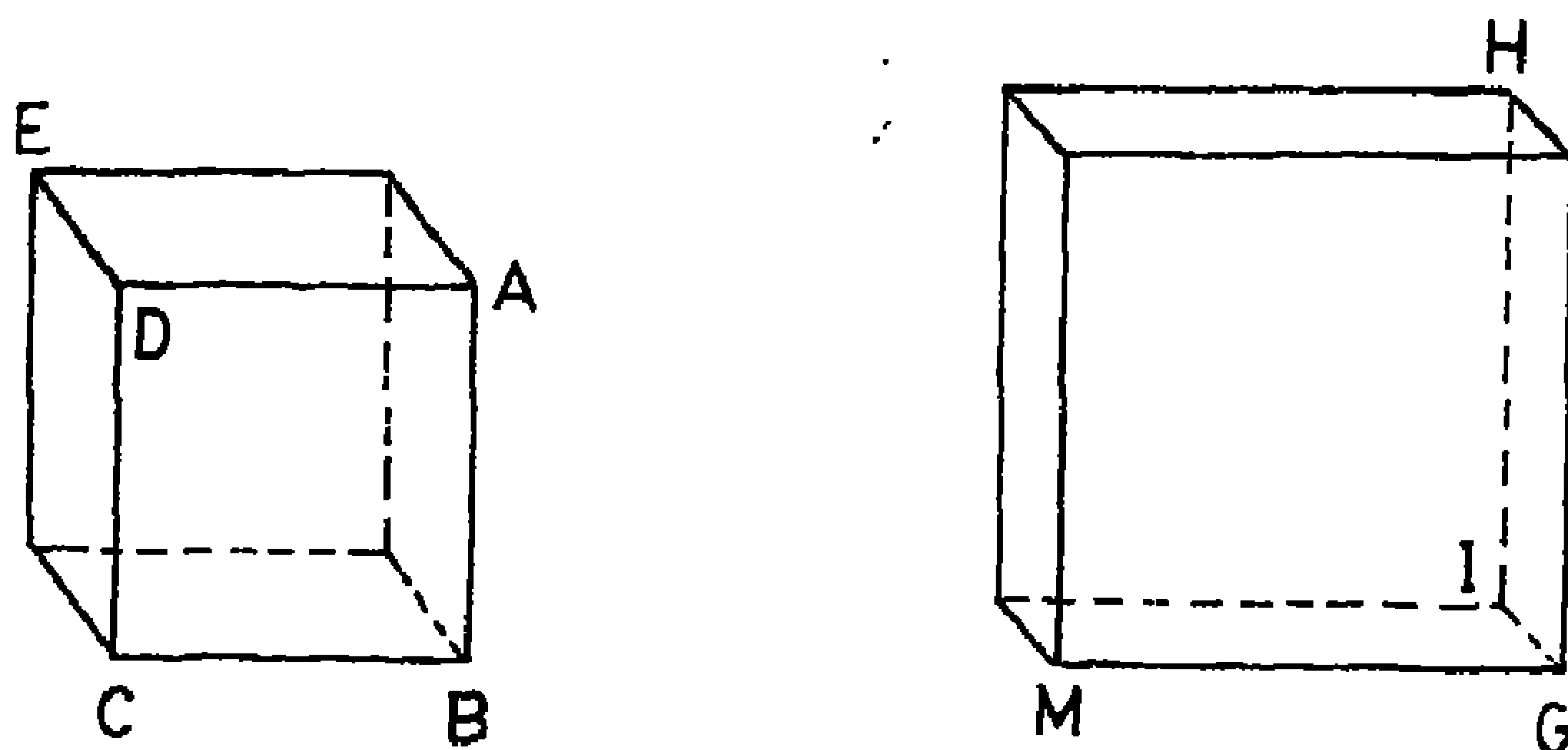


Après cela, nous allons nous occuper des six espèces trinômes qui restent.

Première espèce : un cube plus des côtés sont égaux à un nombre.

Posons *AB* le côté d'un carré qui est égal au nombre des racines, lequel est donné; construisons un solide dont la base soit égale au carré de *AB*, et dont la hauteur soit égale à *BC*; qu'il soit égal au

tangle; et de même toutes les fois que nous dirons "surface<plane>", nous entendrons par là un parallélogramme à angles droits.



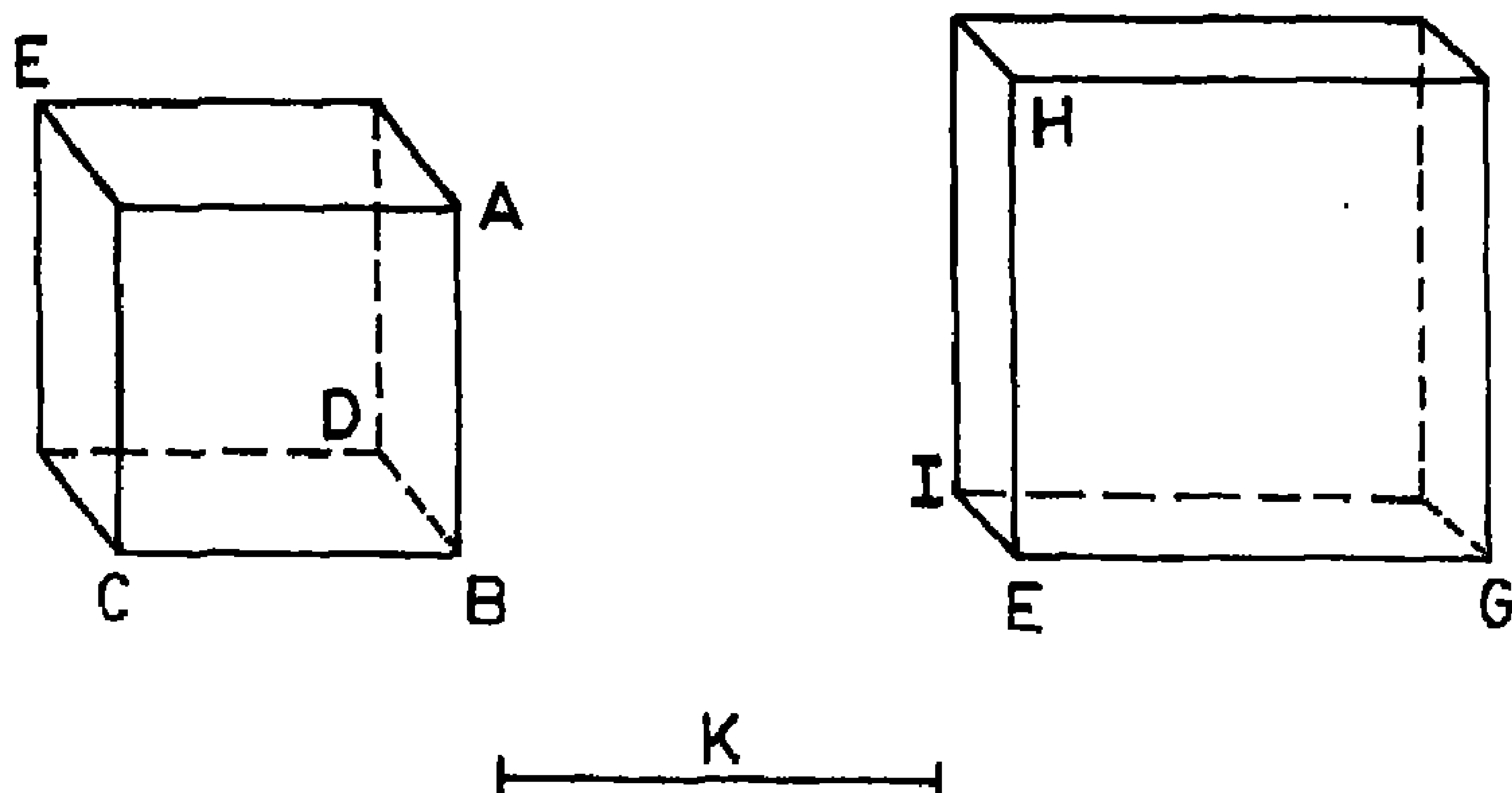
K

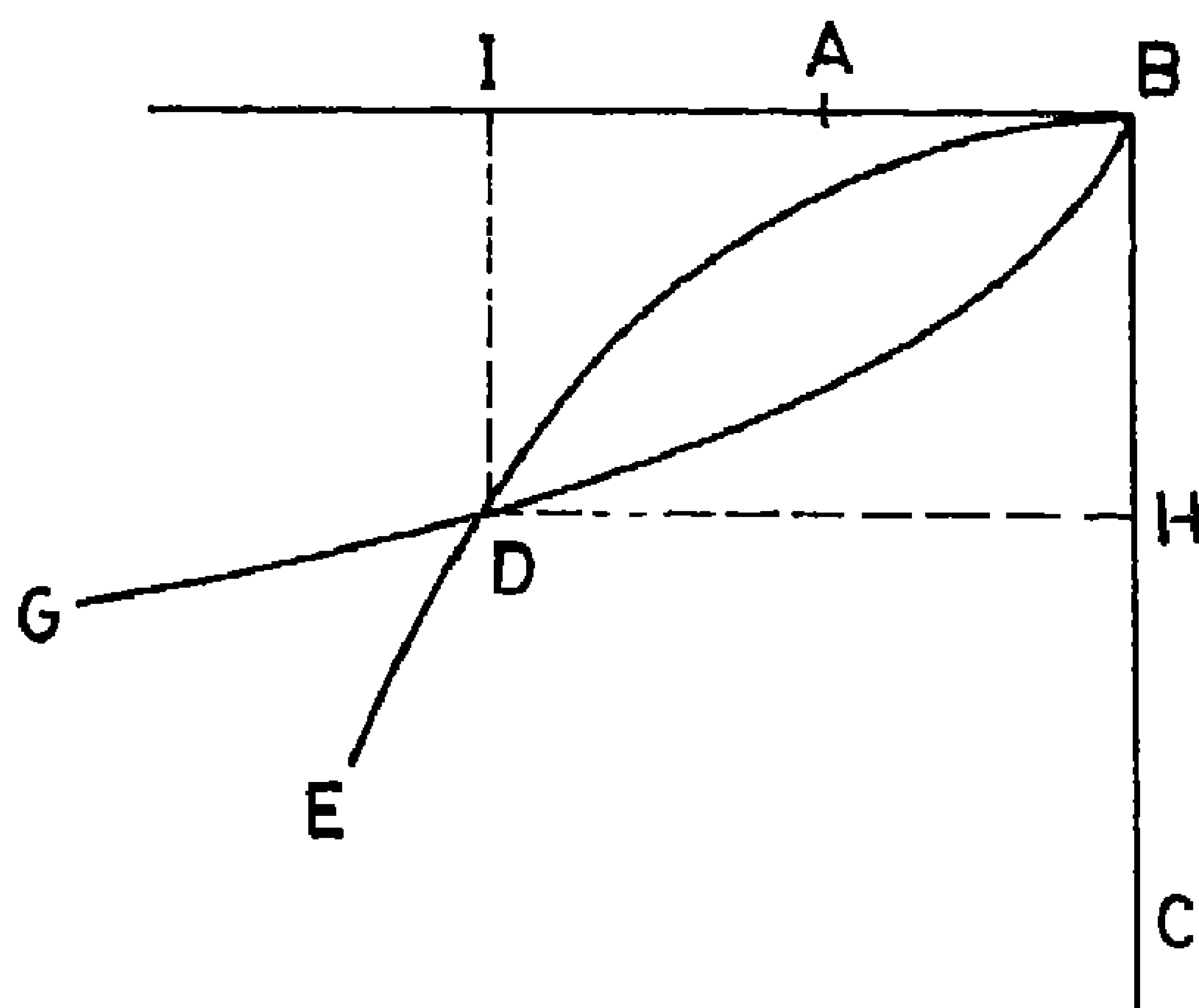
Lemme 3: Etant donné le solide $ABCD$ de base AC, carrée, construire un solide de base carrée et de hauteur égale à EI donnée, qui soit égal au solide $ABCD$.

Faisons le rapport de EI à BD égal au rapport de AB à K. Prenons entre AB et K une droite, moyenne dans la proportion, soit EG. Traçons EG perpendiculaire à EI; complétons le solide IG; traçons HE perpendiculaire au plan IG, et telle qu'elle soit égale à GE; puis complétons le solide $HEIG$.

Je dis que le solide I, ayant pour base le carré HG et pour hauteur EI, donnée, est égal au solide D donné.

Démonstration: Le rapport du carré AC au carré HG est égal au rapport de AB à K. Le rapport du carré AC au carré HG est donc égal au rapport de EI à BD; les bases des deux solides sont alors inversement proportionnelles à leurs hauteurs. Les deux solides sont donc égaux. Ce qu'il fallait démontrer.





à *BA*. Les quatre droites sont donc en proportion continue; et la droite *DH* est de grandeur connue puisqu'elle a été menée d'un point de position connue à une droite de position connue, selon un angle de grandeur connue; de même *DI* sera de grandeur connue. Les deux droites *BH* et *BI* sont donc de grandeur connue, et elles sont moyennes dans la proportion entre les deux droites *AB* et *BC*, je veux dire que le rapport de *AB* à *BH* est égal au rapport de *BH* à *BI*, et est égal au rapport de *BI* à *BC*. Ce qu'il fallait démontrer.

Lemme 2: Etant donnés le carré *ABCD*, base du parallélépipède rectangle *ABCDE*, et le carré *MH*, construire sur la base *MH* un parallélépipède rectangle égal au solide donné *ABCDE*.

Faisons le rapport de *AB* à *MG* égal au rapport de *MG* à *K*; faisons ensuite le rapport de *AB* à *K* égal au rapport de *GI* à *ED*; traçons *GI* perpendiculaire au plan *MH* au point *G*, et complétons
9v le solide *MGIH*. Je dis alors que ce solide est égal au solide /donné.

Démonstration: Le rapport du carré *AC* au carré *MH* est égal au rapport de *AB* à *K*; le rapport du carré *AC* au carré *MH* est donc égal au rapport de *GI*, hauteur du solide *MIH*, à *DE*, hauteur du solide *BE*. Les deux solides sont donc égaux puisque leurs bases sont inversement proportionnelles à leurs hauteurs, ainsi que c'est montré au Livre XI des *Eléments*.[1] Toutes les fois que nous dirons "un solide", nous entendrons par là le parallélépipède rec-

1. *Eléments*, XI, 34.

Introduisons ceci par des lemmes fondés sur l'ouvrage des *Coniques*, comme préparation pour l'élève, et afin que notre traité ne fasse appel à aucun autre ouvrage que les trois déjà mentionnés, je veux dire les deux ouvrages d'Euclide: les *Eléments* et les *Données*, et les deux livres de l'ouvrage des *Coniques*.

Lemme 1: Trouver deux droites entre deux autres droites de manière que les quatre soient en proportion.[1] Soient les deux droites AB et BC; traçons-les telles qu'elles entourent l'angle droit B. Construisons une parabole de sommet le point B, d'axe BC, et dont le côté droit soit BC. Soit la section BDE. La section BDE est donc de position connue, puisque son sommet et son axe sont de position connue, et que son côté droit est de grandeur connue; et elle est tangente à la droite BA, puisque l'angle B est droit et est égal à l'angle des ordonnées, ainsi que c'est montré dans la proposition 33 du Livre I des *Coniques*.[2]

Construisons de même une autre parabole, de sommet le point B, d'axe AB et dont le côté droit soit AB. Soit la section BDG, tangente à la droite BC, ainsi que l'a montré Apollonius dans la pro-
9r position 56 du Livre I.[3] La section/ BDG est tangente à la droite BC; les deux paraboles se coupent nécessairement. Qu'elles se coupent au point D. Le point D est alors de position connue, puisque les deux sections sont de position connue. Menons du point D les deux perpendiculaires DH et DI, sur BC et AB <respectivement>. Elles sont de grandeur connue, ainsi que c'est montré dans les *Données*.[4]

Je dis alors que les quatre droites AB, BH, BI et BC, sont en proportion.

Démonstration: Le carré de HD est égal au produit de BH par BC, puisque la droite DH est une ordonnée de la section BDE. Le rapport de BC à HD, laquelle est égale à la droite BI, est donc égal au rapport de BI à HB. Or DI est une ordonnée de la section BDG; le carré de DI, laquelle est égale à BH, est donc égal au produit de BA par BI. Le rapport de BI à BH est donc égal au rapport de BH

1. Dans le langage du XVIIème siècle, on aurait traduit par "en proportion continue". Puisque le sens est clair, nous nous tenons à une traduction littérale de l'arabe.

2. Il s'agit plutôt de la proposition 32 du même livre.

3. Il s'agit plutôt de la proposition 52 du même livre.

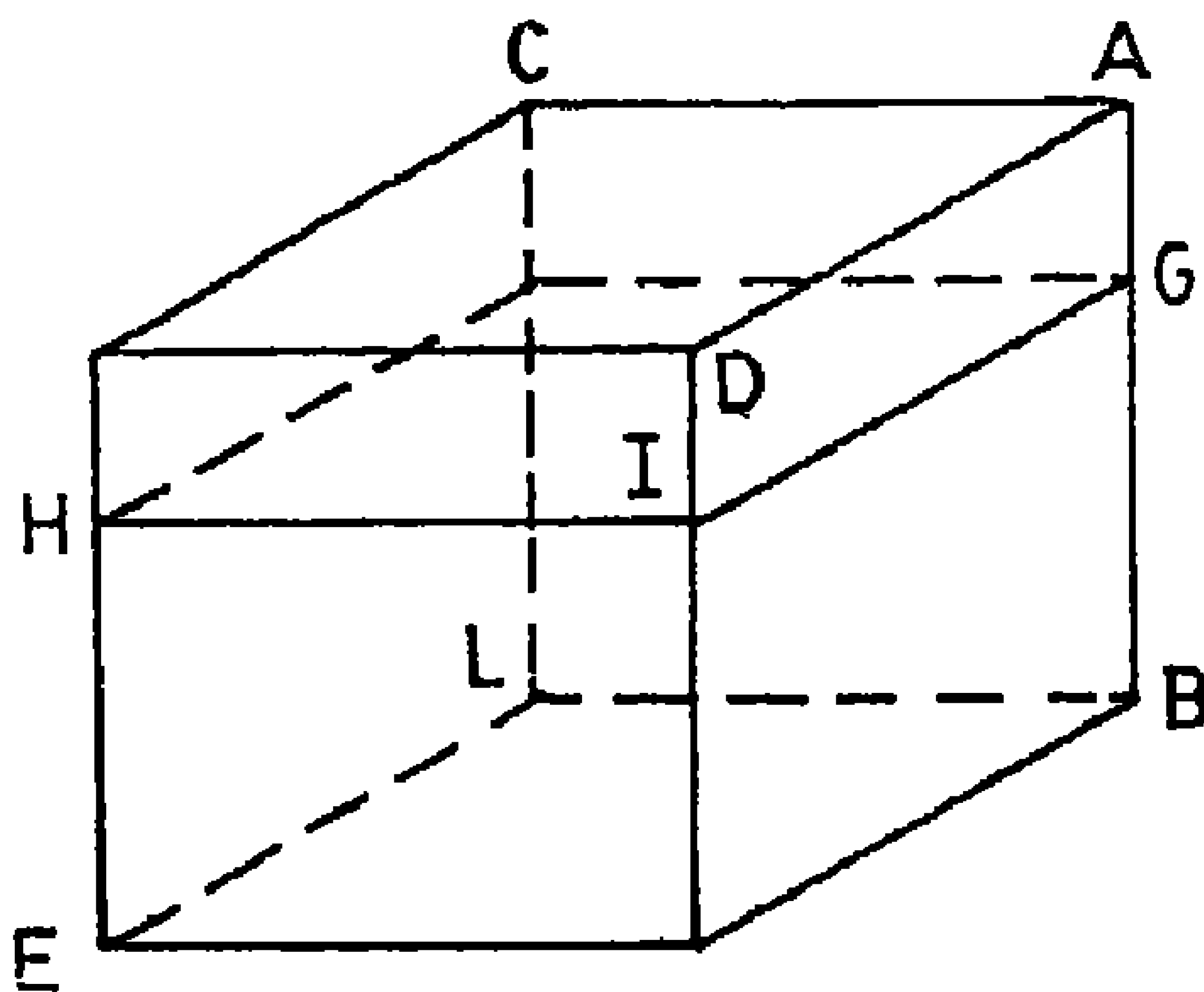
4. Voir *op. cit.* propositions 25, 26, 30.

Troisième espèce: un cube est égal à un carré plus trois racines.

Un carré est donc égal à une racine plus trois en nombre.

Démonstration: Posons le cube *ABCDE*, lequel soit égal à un carré plus trois de ses côtés; séparons de la droite *AB*, qui est son côté, la droite *AG* égale au nombre de carrés, lequel est un, et complétons le solide *AGIHC*. Le solide *AGHIC* est donc égal au nombre donné de carrés. Il reste le solide GE égal au nombre donné de côtés. Mais le rapport de ces deux solides l'un à l'autre est égal au rapport de la base *GC* à la base *GL*, ainsi que c'est montré dans le onzième livre des *Eléments*,[1] car les deux hauteurs sont égales. Mais le rec-
8v tangle *GC* est égal à une fois la racine/ du carré *CB*, et le rectangle *GL* est égal au nombre des racines, qui est trois. Le carré *CB* est donc égal à une seule racine plus trois en nombre. Ce qu'il fallait démontrer.

Tant que ces démonstrations ne sont pas comprises sous cette forme, bien qu'on y rencontre des difficultés, cet art ne peut pas être un savoir.



< Equations trinômes du troisième degré >

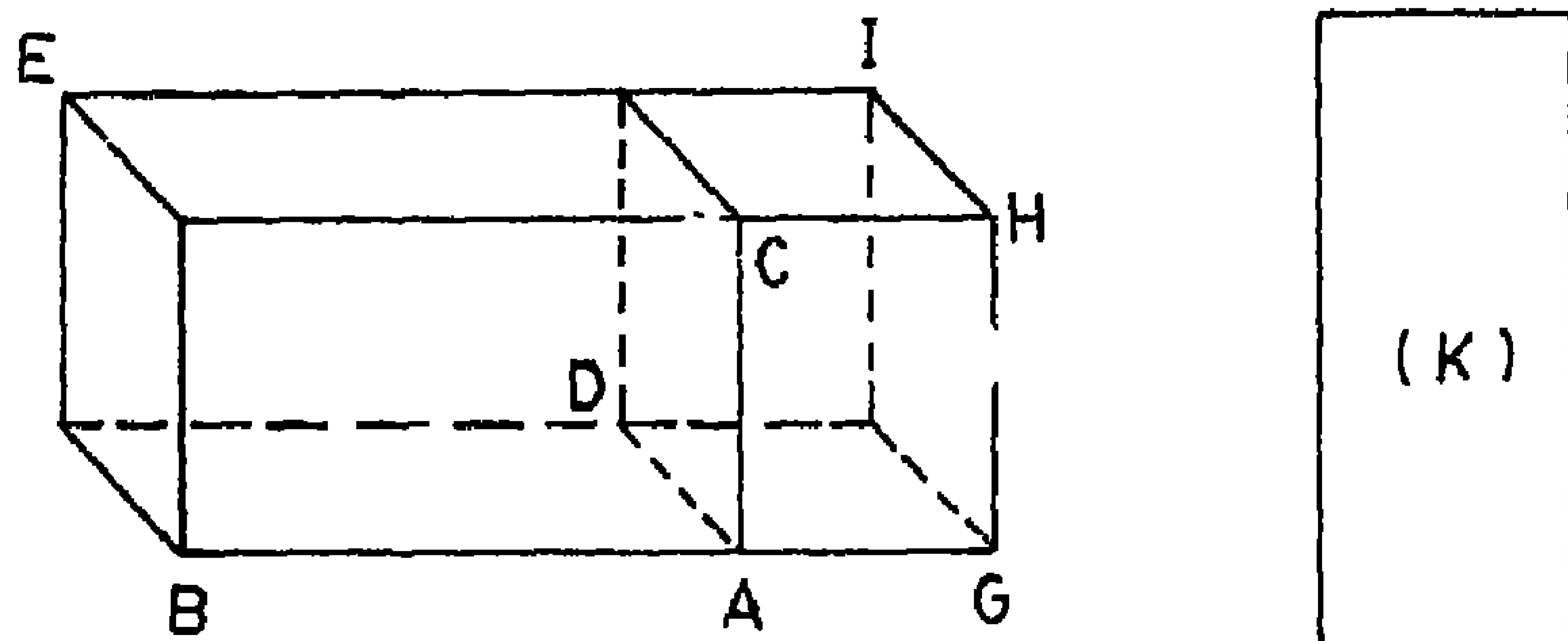
Après avoir introduit ces espèces qu'on a pu démontrer à partir des propriétés du cercle, je veux dire à partir de l'Ouvrage d'Euclide, abordons à présent les espèces qu'on ne peut démontrer qu'à partir des propriétés des sections coniques. Il y en a quatorze espèces. L'une est binôme: un nombre est égal à un cube; ensuite, les six trinômes qui restent; puis sept quadrinômes.

---

1. *Eléments*, XI, 32.

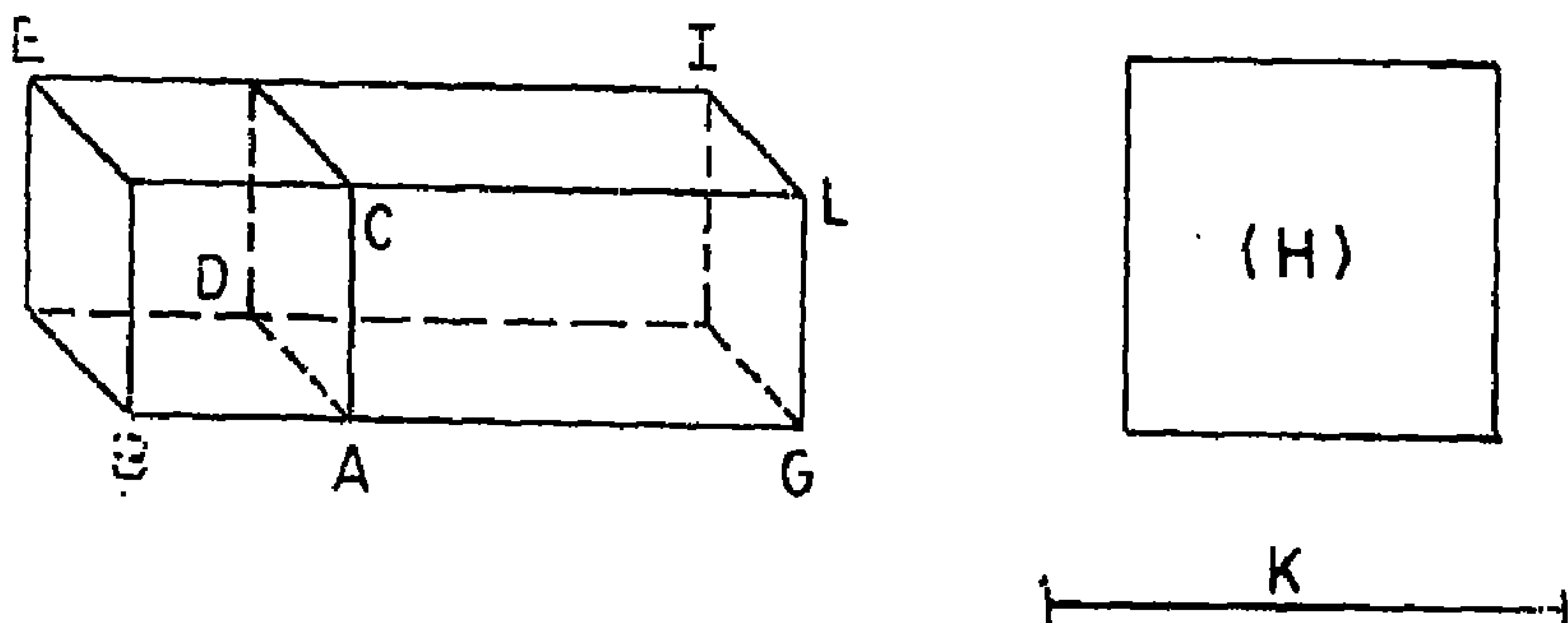
est donc égal à un carré plus le nombre de racines donné pour le carré. Ce qu'il fallait démontrer.

Exemple de cette espèce: un cube plus trois carrés sont égaux à dix racines. Un carré plus trois racines sont donc égaux à dix en nombre.

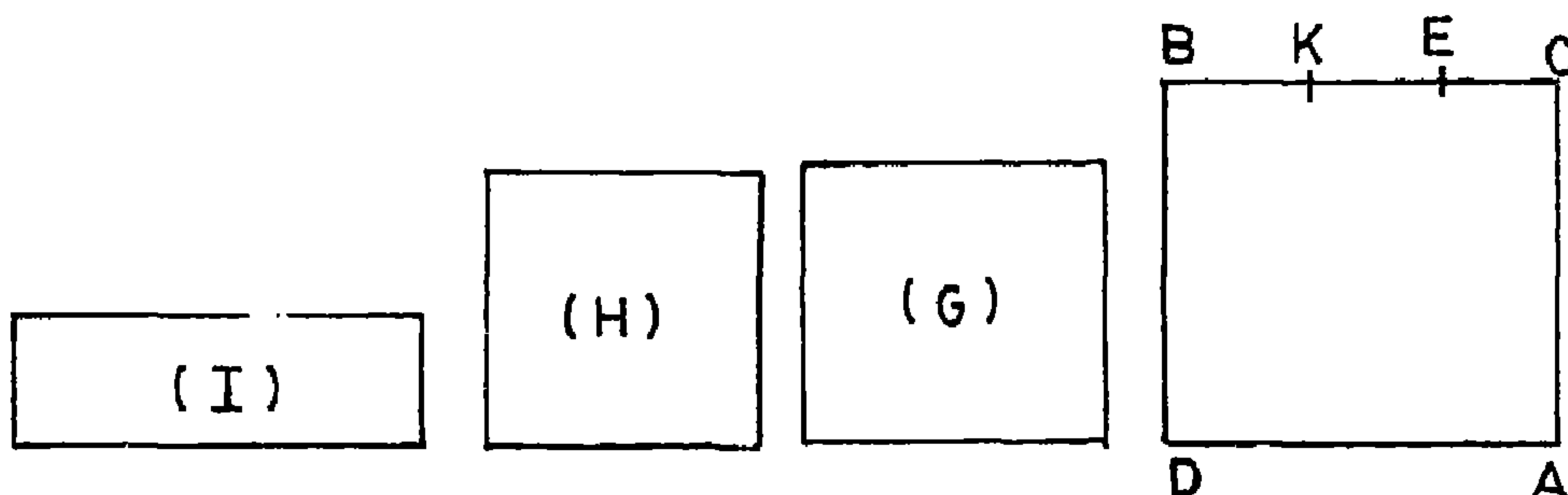


Deuxième espèce: un cube plus deux racines sont égaux à trois
8r carrés. Un carré / plus deux sont donc égaux à trois racines.

Démonstration: posons le cube $ABCDE$, lequel, ajouté à deux de ses racines, soit égal à trois carrés; posons un carré H égal à CB; et posons K, trois. Le produit de H par K est donc trois carrés de la racine du cube AE. Construisons sur AC un rectangle égal à deux, et complétons le solide $AGCID$; il sera donc égal au nombre des racines. Mais lorsqu'on multiplie la droite GB par le carré de AC, il en résulte le solide BI, et le solide AI est égal au nombre des côtés. Le solide BI est donc égal au cube plus un nombre égal à celui de ses côtés. Le solide BI est donc égal au nombre de carrés. La droite GB, ainsi qu'on l'a montré dans la proposition précédente, est donc égale à trois, et le rectangle BL est un carré plus deux. Un carré plus deux sont donc égaux à trois racines, puisque le rectangle BL est le produit de AB par trois .Ce qu'il fallait démontrer.



7v On a montré que, dans la troisième espèce, / rien n'est impossible, et non plus dans la première ; tandis que la seconde comporte des cas impossibles, et se présente sous diverses occurrences ; rien de tel pour les deux autres.



< Equations du troisième degré qui peuvent se ramener aux équations du second degré >

Démontrons que les trois espèces suivantes sont proportionnelles aux trois premières :

Première espèce : un cube plus des carrés sont égaux à des racines.

Posons le cube $ABCDE$; prolongeons AB jusqu'à G, et faisons AG égale au nombre des carrés ; complétons le solide $AGHICD$ comme prolongement du cube AE, ainsi qu'on le fait habituellement. Le solide AI est alors égal au nombre des carrés ; le solide BI, qui est le cube plus le nombre donné des carrés, est donc égal au nombre donné des racines. Construisons le rectangle K égal au nombre donné des racines ; la racine est le côté du cube, c'est-à-dire AD. Le rectangle K, si on le multiplie par AD, est donc égal au nombre donné des côtés ; et le rectangle HB, si on le multiplie par AD, donne le cube plus le nombre donné des carrés. Mais ces deux solides sont égaux ; je veux dire le solide BI et le solide construit sur K et de hauteur AD. Leurs bases sont donc inversement proportionnelles à leurs hauteurs ; or leurs hauteurs sont égales ; leurs bases sont, par conséquent, égales. Mais la base HB est égale au carré CB plus le rectangle HA, qui est égal au nombre des racines de ce carré, nombre qui avait été donné pour les carrés.[2] K, nombre donné pour les racines,

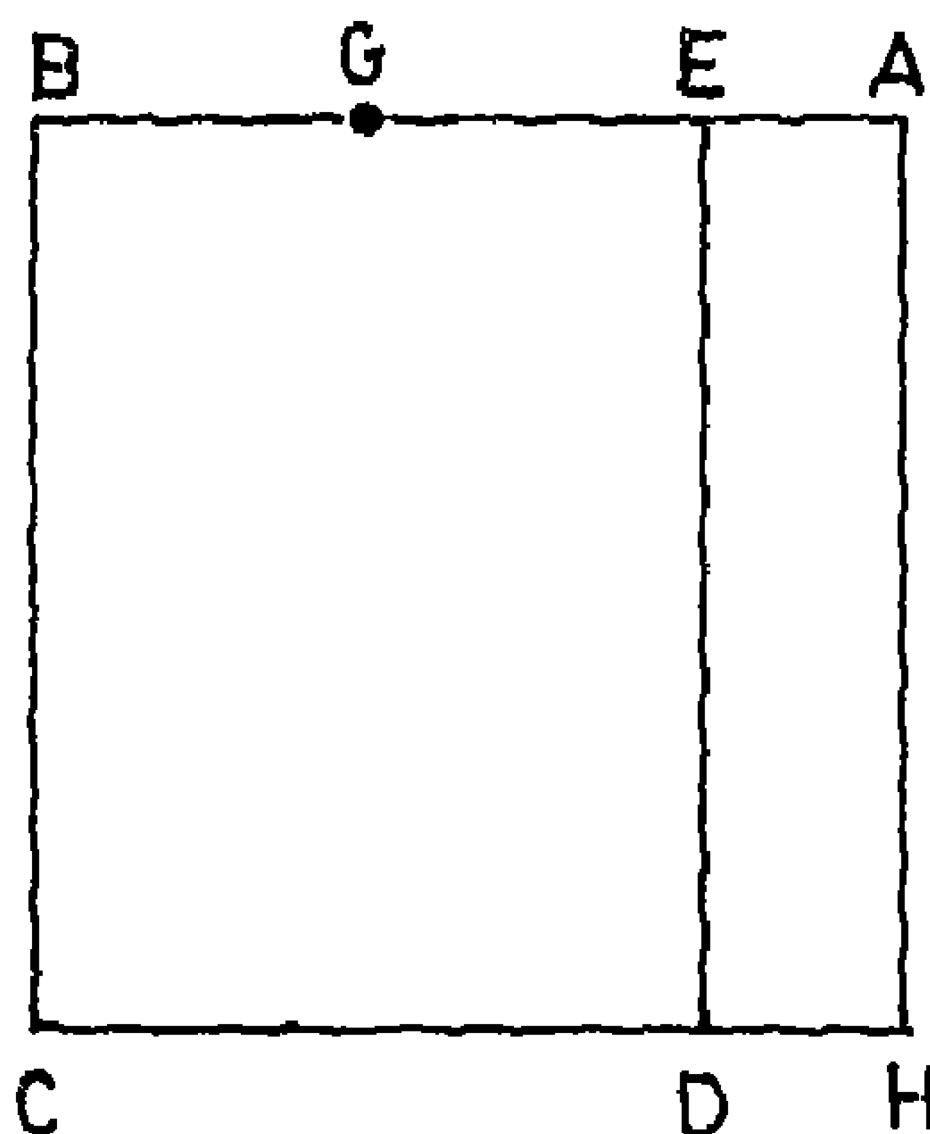
1. Littéralement : racine.

2. أموال

On ajoute le carré de la moitié du nombre des racines au nombre; on prend la racine de la somme, qu'on ajoute à la moitié du nombre des racines. Ce qui résulte est la racine du carré.

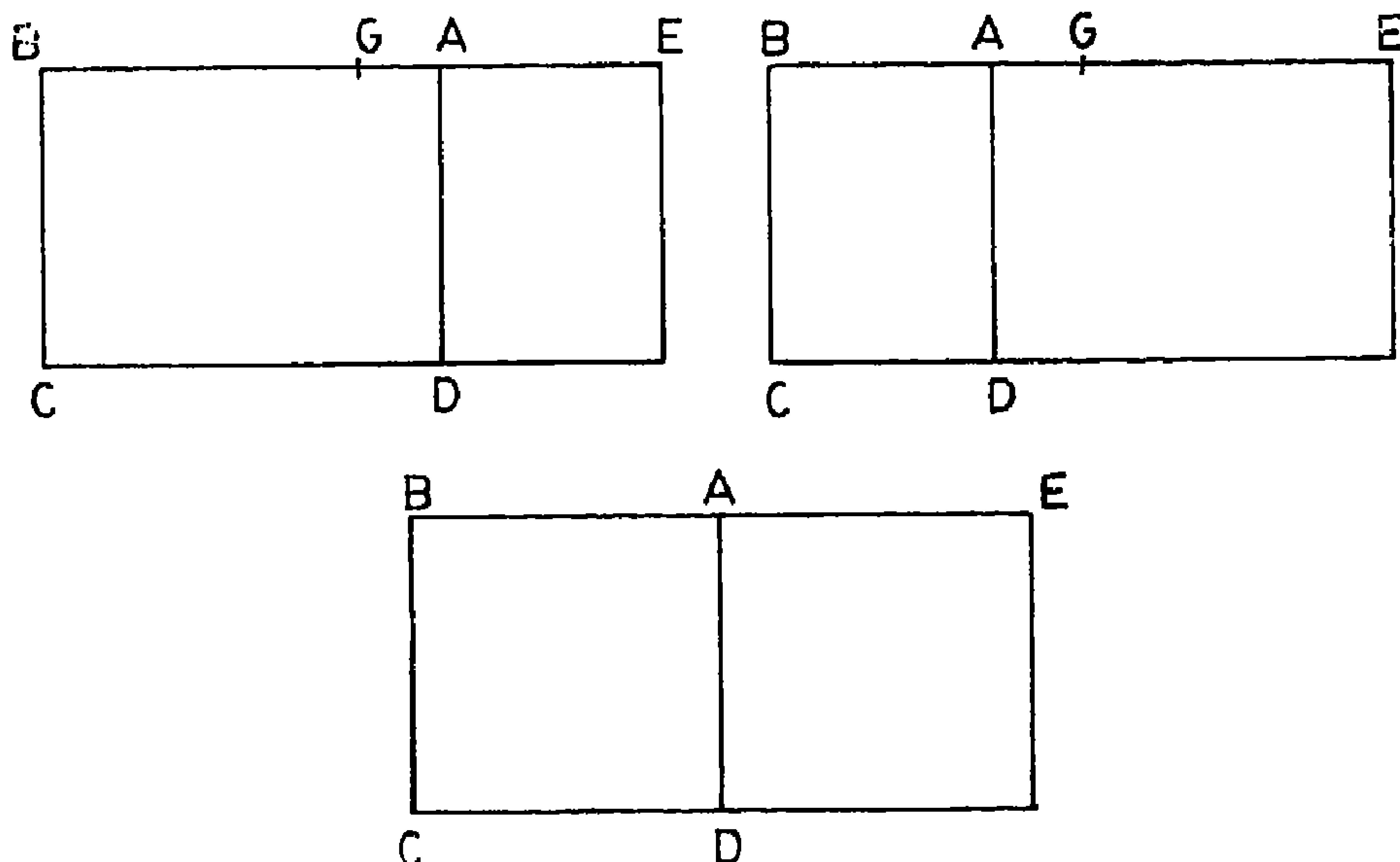
Démonstration: Le carré *ABCH* est égal à cinq de ses racines plus six en nombre. Séparons-en le nombre, qui est le rectangle *AD*; il reste le rectangle *EC*, égal au nombre des racines, lequel est cinq. La droite *EB* est donc cinq; divisons-la en deux parties égales au point *G*. La droite *EB* est donc divisée en deux parties égales au point *G*; ajoutons-lui *EA* sur son prolongement: on a donc la surface *BA* par *AE*, qui est la surface *AD*, connue, plus le carré de *EG*, connu, égaux au carré de *GA*; le carré de *GA* est donc connu, et *GA* est connue. Mais *GB* est connue; *AB* est donc connue.

Il existe pour cette espèce d'autres modes de démonstration; exerce-toi à les chercher.



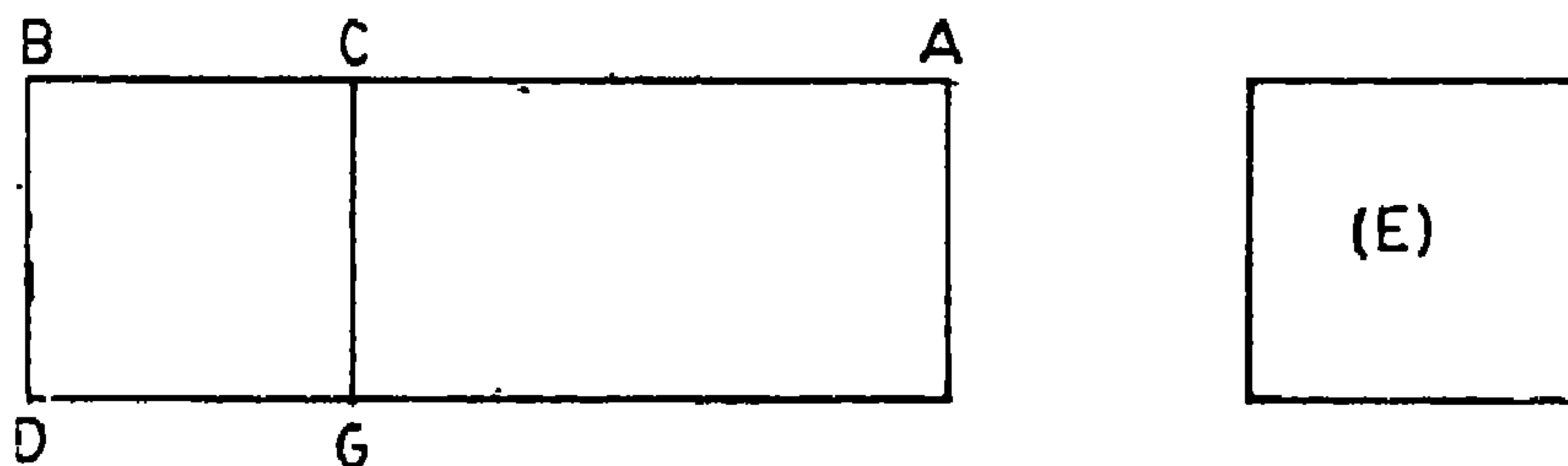
Mais si on suppose *EB*, égale au nombre des racines, et si on cherche un carré et son côté de telle sorte que ce carré soit égal au nombre de ses côtés plus le nombre donné, le carré *ABCD* est alors ce qu'on recherche.

Soit le nombre donné le rectangle *I*, et *H* le carré qui lui est égal; construisons un carré égal au carré *H* plus le carré de *EK*, <droite> qui est la moitié du nombre des côtés. Que < cette somme > soit le carré *G*. Faisons *KC* égale au côté de *G*, et complétons le carré *ABCD*. Le carré *ABCD* est donc ce qu'on recherche.



ainsi que l'a montré Euclide dans le sixième Livre des *Eléments.*[1] Le côté *CB* est donc connu, ainsi que c'est montré dans les *Données.*[2] C'est ce qu'on voulait démontrer.

Il apparaît donc que cette espèce comporte différents cas, dont certains sont impossibles; et tu peux connaître les conditions de sa validité lorsqu'il s'agit des nombres, selon ce qu'on a montré pour la première espèce.



Troisième espèce: un nombre plus des racines[3] sont égaux à un carré.

1. *Eléments*, VI, 27-28.
2. *Op. cit.* prop. 58.
3. Littéralement : racine.

nombre des racines ; on prend la racine du reste, à laquelle on ajoute la moitié du nombre des racines, ou dont on le retranche. Ce qu'on obtient après l'addition et ce qui reste après la soustraction est la racine du carré.

La démonstration numérique se conçoit lorsqu'on conçoit la démonstration géométrique :

Posons le carré *ABCD* et posons *ED* égal au nombre, et <construit> sur *AD*, mais de côté opposé. Le rectangle *EC* est par exemple égal à dix côtés du carré *AC*; *EB* est donc dix. Dans la première figure, *AB* est la moitié de *EB*; dans la deuxième, elle est plus grande que la moitié de *EB*, et dans la troisième, elle est plus petite que la moitié de *EB*. Dans la première figure, *AB* est donc cinq; dans la deuxième figure, on divise *EB* en *G*, et de même dans la troisième ; la droite *EB* est donc divisée en deux moitiés au point *G*, et en deux parties inégales au point *A*. Le rectangle *EA* par *AB*, plus le carré de *GA*, est donc égal au carré de *GB*, ainsi que c'est montré dans le deuxième livre des *Eléments*.[1] Le rectangle *EA* par *AB*, étant le nombre, est connu. Si on le soustrait du carré de *GB*, qui est la moitié du nombre des racines, il reste le carré de *GA*, connu. On retranche *GA* de *GB* dans la troisième figure, et dans la deuxième on ajoute à *GB* la grandeur[2] *GA*, il reste *AB*. Et c'est ce qu'il s'agissait de trouver.

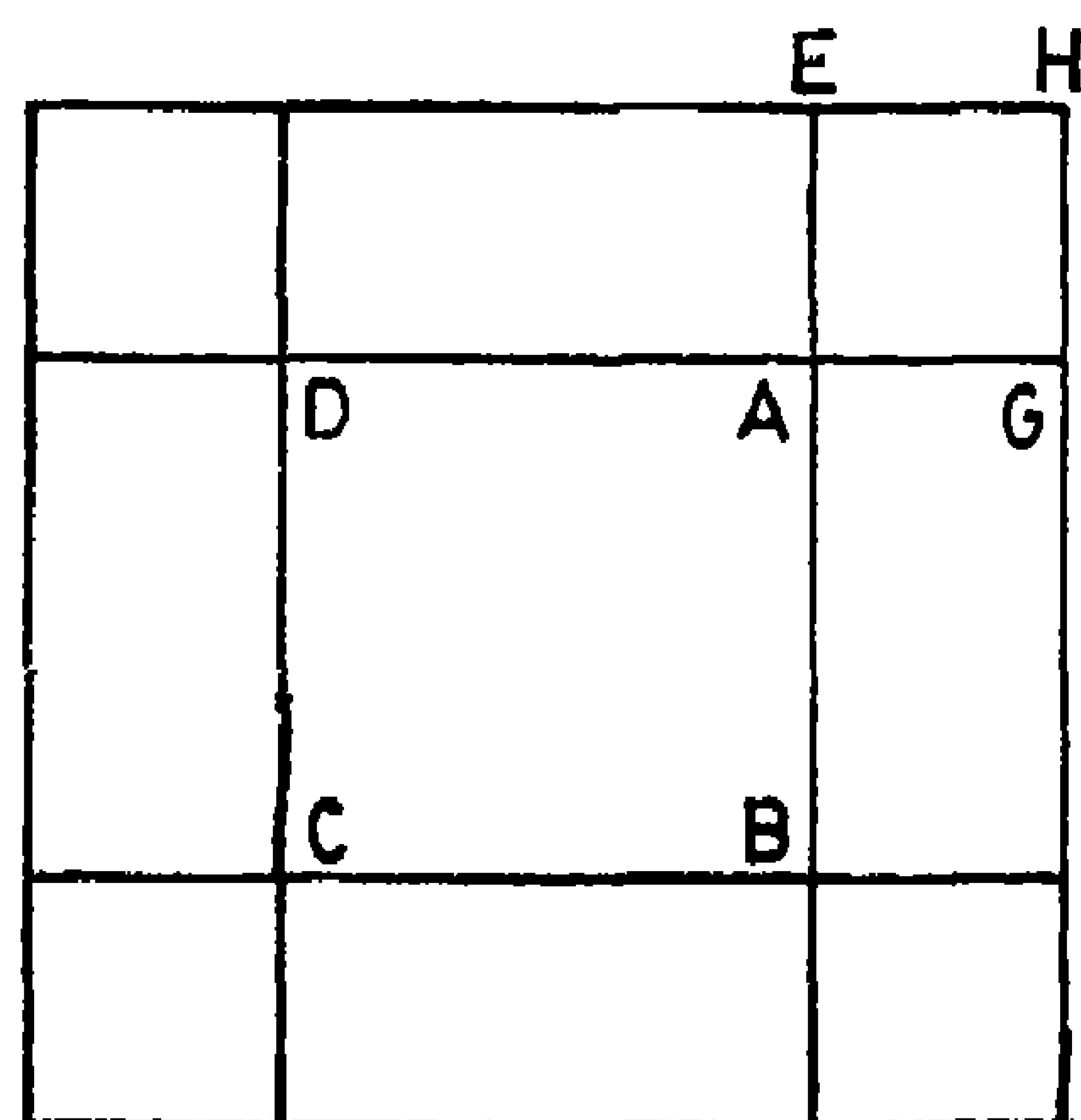
Tu peux, si tu veux, le démontrer d'autres manières, mais, par crainte des longueurs, nous nous sommes bornés à celle-ci. Si par exemple on suppose la droite *AB* dix, et si on veut en retrancher une droite telle que le produit de *AB* par cette droite soit égal au carré de cette droite plus un autre rectangle, lequel ne soit pas plus grand que le carré de la moitié de *AB*, je veux dire plus le nombre donné, qui est le rectangle E; si donc nous voulons retrancher de *AB* une
7r droite telle que/ son carré plus le rectangle *E* soient égaux au produit de *AB* par cette droite, appliquons à la droite *AB* connue un rectangle égal au rectangle connu *E*, et défaillant d'un carré; ce qui est possible car le rectangle *E* n'est pas plus grand que le carré de la moitié de *AB*. Soient la surface *AG*, le carré soustrait, la surface *CD*,

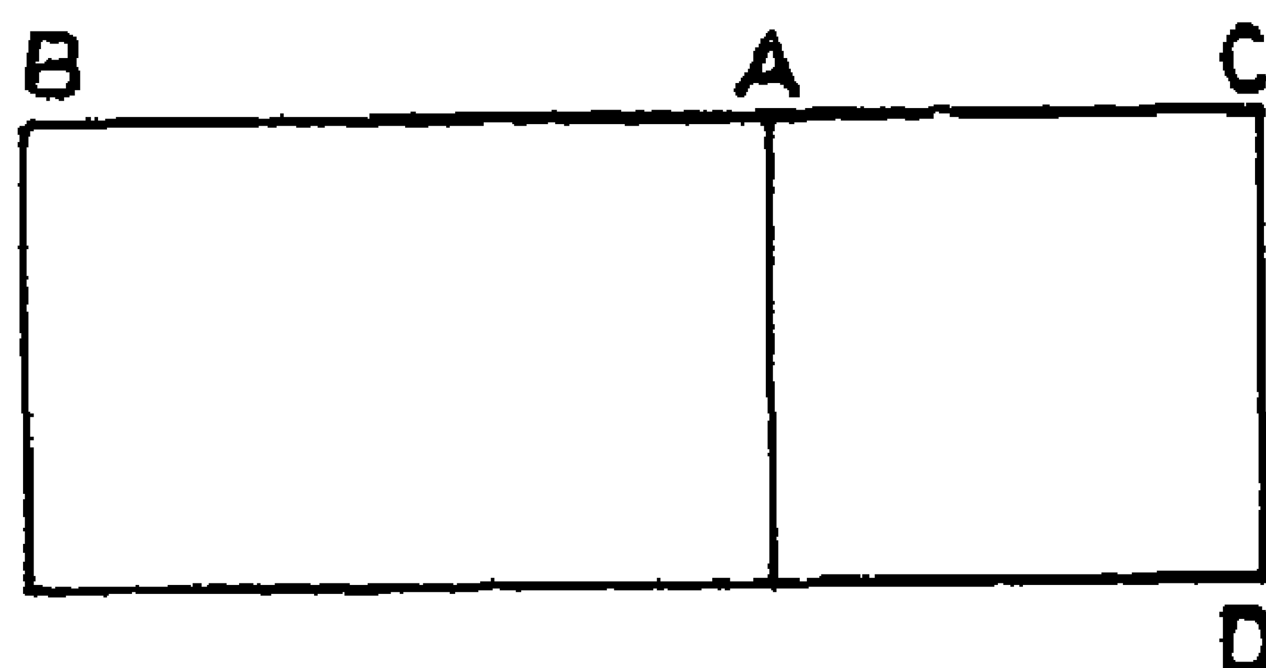
1. *Eléments*, II, 5.

2. Ce mot rend ici le terme مبلغ contrairement à la traduction usuelle.

ses racines trente-neuf en nombre. Le carré *HI* est donc soixante-quatre. Si on prend sa racine, et si on en retranche cinq, il reste *AB*.

Mais si on suppose la droite *AB* dix, et si on veut un carré tel que le produit de son côté par *AB* soit égal au nombre donné, on pose alors le nombre donné égal à la surface *E*, qui est un parallélogramme à angles droits, ainsi que nous l'avons dit précédemment. Que l'on applique à la droite *AB* un parallélogramme égal au rectangle E, et qu'on le fasse excéder d'un carré, ainsi que l'a montré Euclide dans le livre VI des *Eléments*;[1] soit *BD* le parallélogramme, et *AD* le carré excédant; son côté *AC* est donc connu, ainsi que c'est montré dans les *Données*.[2]





Deuxième espèce: un carré plus un nombre sont égaux à des racines.[3]

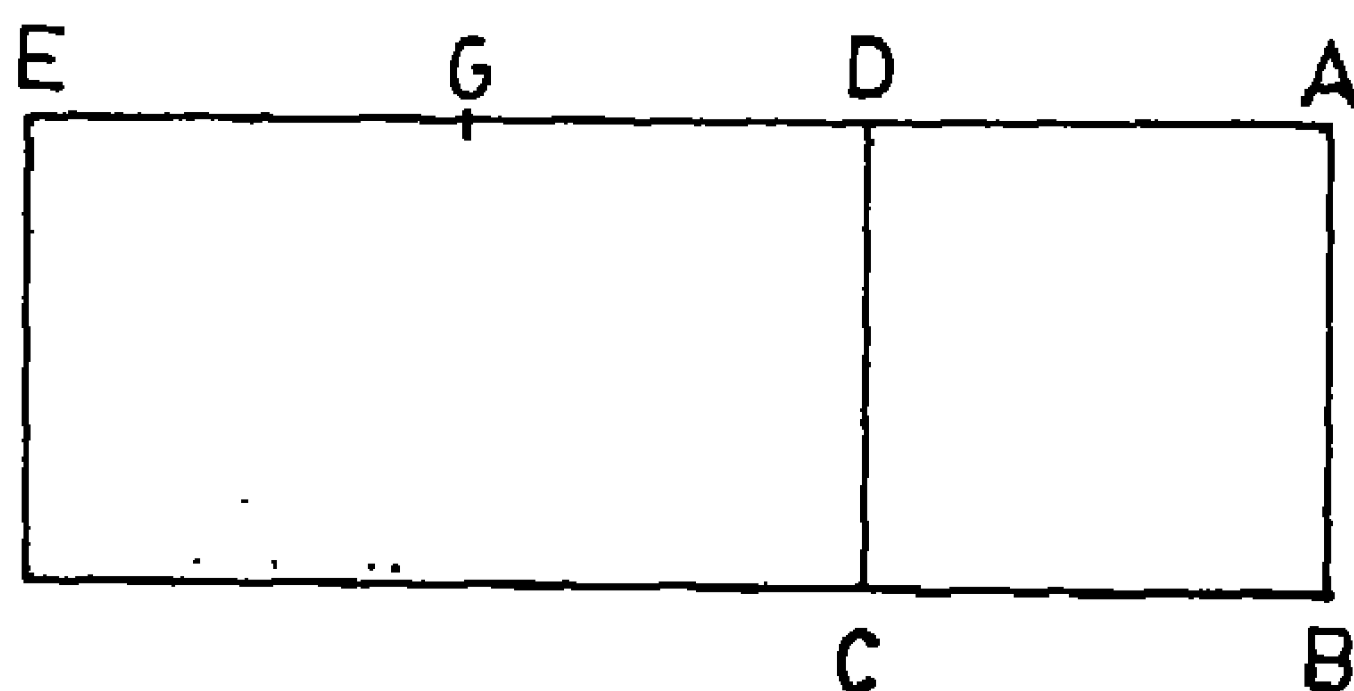
6v Il faut dans cette espèce que le nombre ne soit pas plus grand / que le carré de la moitié du nombre des racines, sinon le problème est impossible.

S'il est égal au carré de la moitié du nombre des racines, la moitié du nombre des racines est donc alors la racine du carré; s'il est plus petit que lui, on soustrait le nombre du carré de la moitié du

1. *Eléments*, VI, 29.
2. Voir *Les Oeuvres d'Euclide*, trad. F. Peyrard, (Paris, 1966); *les Données*, prop. 59 p. 565.
3. Littéralement: racine.

En ce qui concerne la démonstration géométrique, aucun de ces problèmes n'est impossible absolument. Or la démonstration numérique de cette espèce est facile quand on en conçoit la démonstration géométrique. Et la démonstration géométrique s'effectue de la manière suivante:

Posons le carré AC plus dix de ses racines égaux à trente-neuf en nombre; posons d'autre part dix de ses racines égales au rectangle CE; la droite DE est donc dix. Partageons-la en deux moitiés au point G. Puisqu'on a divisé la droite DE en deux moitiés au point G, et qu'on a ajouté AD sur son prolongement, le produit de EA par AD, qui est égal au rectangle BE, plus le carré de DG, sont égaux au carré de GA; mais le carré de DG, qui est la moitié du nombre des
6r racines, est connu, et le rectangle BE, qui/ est le nombre donné, est connu; le carré de GA est donc connu, et GA est connue. Si on en retranche GD, il reste AD, connue.



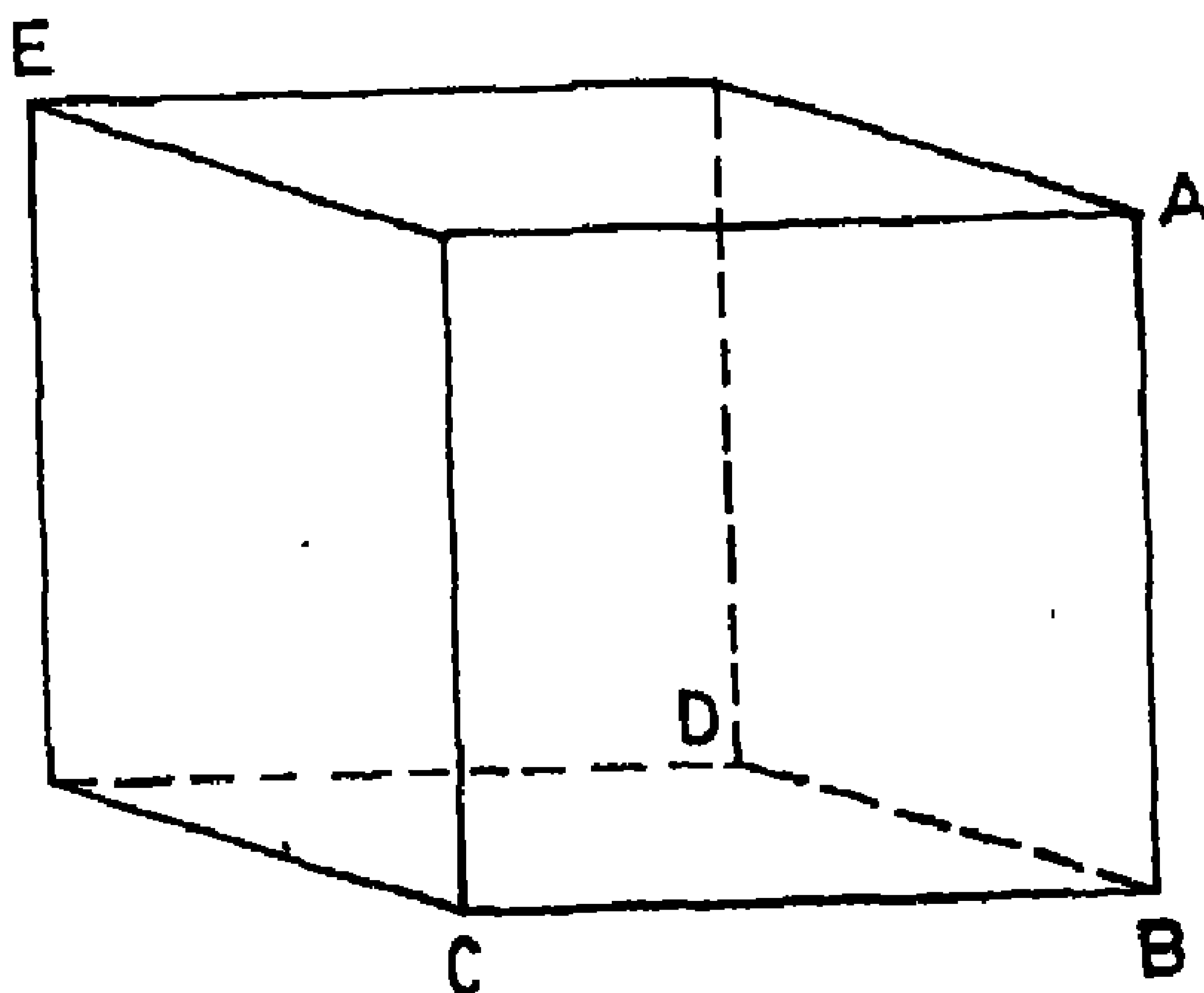
Autre démonstration: posons $ABCD$ un carré; menons BA jusqu'à E et construisons EA telle qu'elle soit le quart du nombre des racines, c'est-à-dire deux et demi. Menons DA jusqu'à G, et construisons GA égale au quart du nombre des racines; de la même manière menons des droites de tous les <sommets> des angles du carré, et complétons la surface HI; elle sera donc un carré, car GE est un carré, AC est un carré et CI est un carré, ainsi que c'est montré dans le Livre VI des *Eléments*.[1] Les quatre carrés situés dans les quatre angles du grand carré sont chacun le carré de deux et demi; leur somme est donc vingt-cinq, carré de la moitié du nombre des racines. Le rectangle GB est égal à deux et demi des racines du carré AC, puisque GA est deux et demi. Les quatre rectangles sont donc égaux à dix racines du carré AC. Mais on a supposé le carré AC plus dix de

1. *Eléments*, VI, 24.

de ses carrés,[1] par exemple égal à deux carrés, et le carré de son côté *AC*. Si donc on multiplie la surface *AC* par deux, on obtient le cube *ABCDE*. Si d'autre part on la multiplie par *BD*, qui est son côté, on obtient le cube *ABCDE*. On a donc *BD*, qui est son côté, égal à deux. Et c'est ce qu'on voulait.

Et toutes les fois que dans ce traité nous dirons : les carrés du cube, nous entendrons par là les carrés de ses côtés.

Puisque nous venons d'achever les équations binômes, traitons maintenant des trois premières des douze espèces trinômes.



Première espèce : un carré plus dix de ses racines sont égaux à trente-neuf en nombre.

Multiplie la moitié du nombre des racines par lui-même ; ajoute le produit au nombre, et soustrais de la racine de la somme la moitié du nombre des racines. Le reste est la racine du carré.

En ce qui concerne la démonstration numérique, nous avons besoin de deux conditions ; la première : que le nombre des racines soit un nombre pair pour qu'il ait une moitié ; la deuxième : que la somme du carré de la moitié du nombre des racines et du nombre, soit un nombre carré ; sinon, le problème est impossible, numériquement.

1. Littéralement : à la pluralité (عدة) de ses carrés.

Quatrième espèce: un carré est égal à cinq de ses racines. Le nombre des racines est donc la racine du carré.

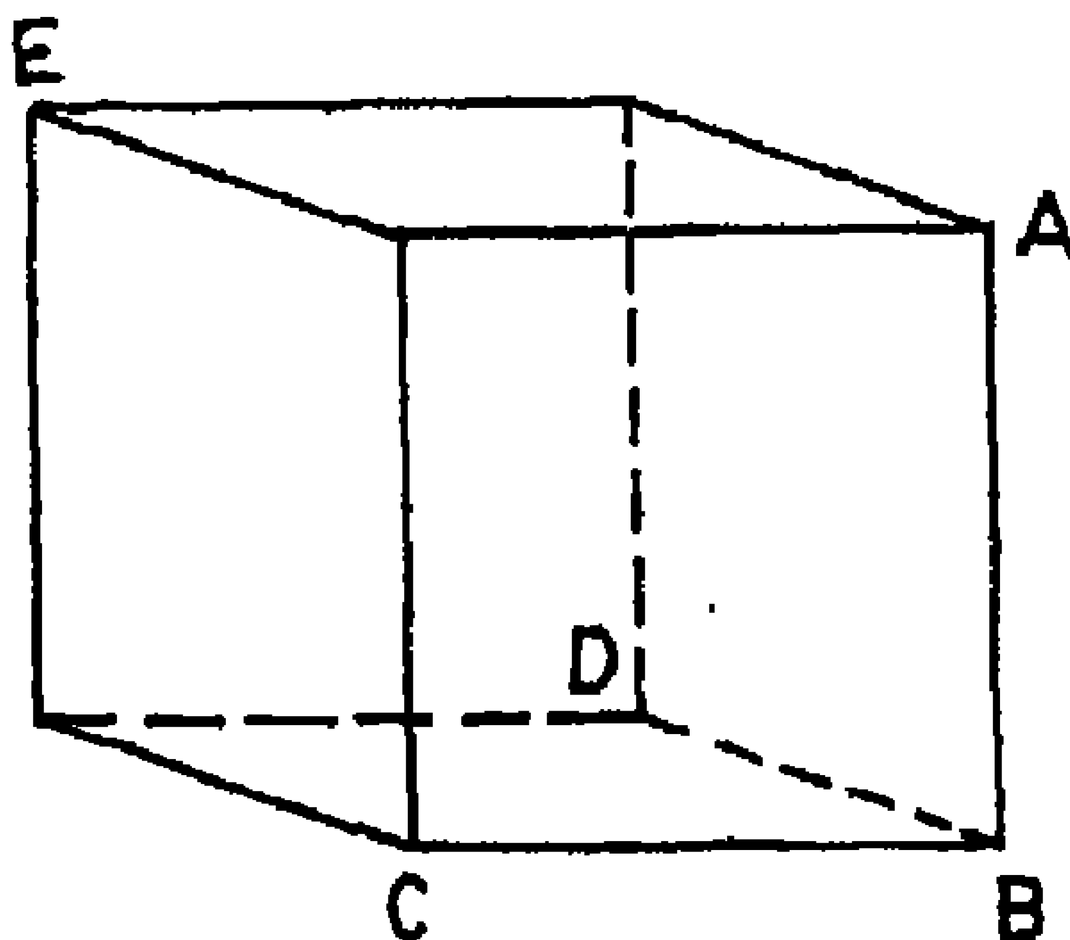
Démonstration numérique:

Si on multiplie la racine par elle-même, on obtient le carré; mais si on multiplie cette racine par cinq, on obtient aussi le carré: elle est donc cinq.

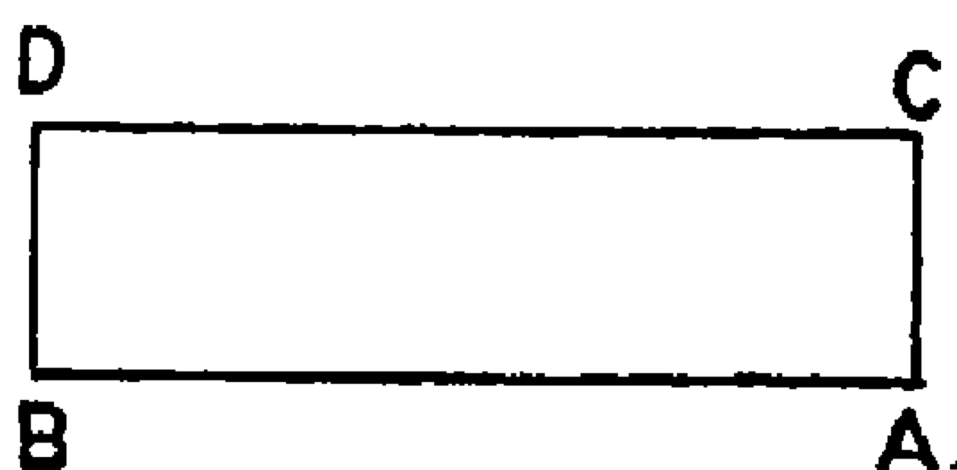
La démonstration géométrique est analogue à celle-ci, si tu poses un carré égal à cinq de ses côtés.

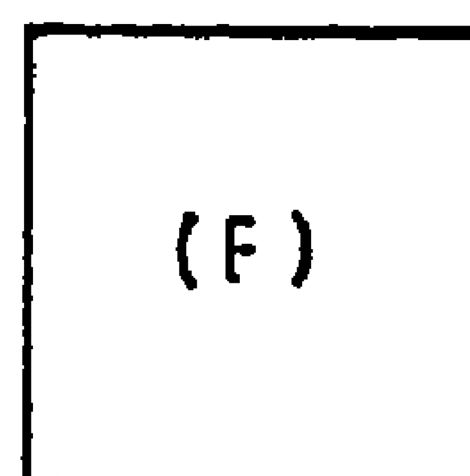
Cinquième espèce: des choses sont égales à un cube. Par la démonstration numérique, il est clair que cette espèce est la même que: un nombre est égal à un carré. Par exemple: quatre racines sont égales à un cube; c'est comme si on disait: quatre, en nombre, est égal à un carré, étant donné la proportionnalité mentionnée précédemment.

En ce qui concerne la démonstration géométrique, on pose le cube *ABCDE* dont la mesure soit égale à la mesure de quatre de ses côtés, et dont le côté soit *AB*. Si on multiplie son côté, qui est *AB*, par quatre, on obtient donc le cube *ABCDE*; si cependant on multiplie son côté par son carré, je veux dire le carré *AC*, on obtient le cube. Le carré *AC* est donc quatre.



5v *Sixième espèce*: des carrés sont égaux à un cube. Ceci/ équivaut à: un nombre est égal à une racine. Démonstration numérique: le rapport du nombre à la racine est égal au rapport du carré au cube, ainsi que c'est montré dans le livre VIII des *Eléments*. Démonstration géométrique: posons le cube *ABCDE* égal à un certain nombre

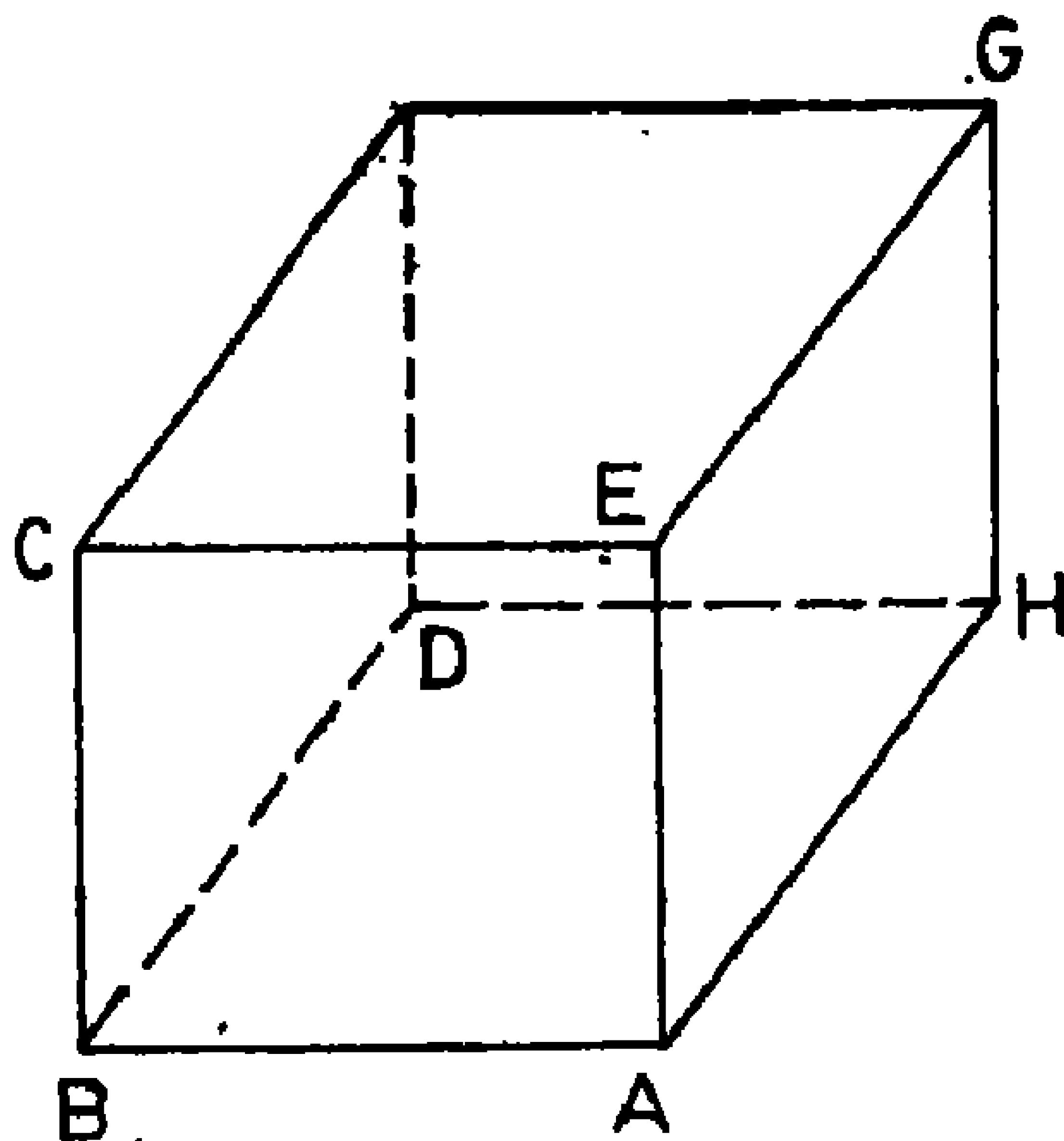




Troisième espèce: un nombre est égal à un cube. Si l'objet est un nombre, alors le cube est connu, et il n'existe aucune voie pour déterminer son côté, sinon par induction, ce qui vaut également pour toutes les puissances numériques, telles que carré-carré, carré-cube, cubo-cube, ainsi que nous l'avons mentionné précédemment.

5r Mais / par la géométrie, nous posons le carré AD le carré de l'unité, je veux dire que AB est égal à BD, et tel qu'on suppose que chacun d'eux soit égal à l'unité. Elevons ensuite sur la surface AD, au point B, la perpendiculaire BC, telle qu'elle soit égale au nombre donné, ainsi que l'a montré Euclide dans le onzième livre de son ouvrage. Complétons le solide $ABCDEGH$. On sait que la mesure de ce solide est égale au nombre donné. Construisons un cube égal à ce solide; mais la construction de ce cube ne peut s'effectuer que par les propriétés des sections coniques. Nous la reportons donc jusqu'à ce que nous ayons proposé les lemmes qui s'y rapportent.

Et toutes les fois que nous dirons: un nombre est égal à un solide, nous entendrons par "nombre" un parallélépipède rectangle, dont la base est le carré de l'unité et dont la hauteur est égale au nombre donné.



Les Indiens possèdent des méthodes pour déterminer les côtés des carrés et des cubes, reposant sur une induction <fondée> sur peu < de nombres >; c'est-à-dire la connaissance des carrés de neuf chiffres, à savoir le carré de un, de deux, de trois<...>, ainsi que des produits de l'un par l'autre, à savoir, le produit de deux par trois, et de même pour les cas similaires.[2] Nous avons composé un ouvrage pour démontrer que ces méthodes sont exactes et qu'elles mènent à l'objet cherché. Nous en avons, en outre, multiplié les formes, je veux dire que nous avons montré comment déterminer les côtés du carré-carré, du carré-cube, du cubo-cube, et ainsi de suite, ce en quoi personne ne nous avait précédé. Ces démonstrations sont des démonstrations numériques, fondées sur les livres Arithmétiques de l'ouvrage des *Eléments*.[3]

La démonstration géométrique de la deuxième espèce est la suivante:

Posons donnée la droite AB égale au nombre donné, et AC l'unité, telle qu'elle soit perpendiculaire à AB. Complétons le rectangle AD. On sait que l'aire de la surface AD est alors le nombre donné. Construisons une surface carrée égale au rectangle AD; soit le carré E, comme l'a montré Euclide dans la proposition 14 du deuxième livre de son ouvrage. Le carré E est donc égal au nombre donné, et il est connu; son côté est donc également connu. Médite sur la démonstration proposée par Euclide. C'est ce qu'on voulait obtenir.

Et toutes les fois que dans ce traité nous dirons: un nombre est égal à une surface, nous entendrons par le nombre un quadrilatère à angles droits, dont l'un des deux côtés est un et l'autre une droite égale en mesure au nombre donné, et tel que chacune des parties de sa mesure soit égale au deuxième côté, je veux dire celui que nous avons supposé un.

---

1. Nous avons préféré cette expression à celle, plus usuelle, de "règle de l'art", pour mieux exprimer l'opposition à "induction".

2. Sur cette méthode, voir R. Rashed, "Résolution des équations numériques et algèbre: Sharaf-al-Dīn al-Ṭūsī, Viète", *Archive for History of Exact Sciences*, 12 (1974), 252 sq.

3. Dans le texte arabe, l'ouvrage est désigné par la transcription phonétique de "Στοιχεῖα". Nous trouverons cette transcription à plusieurs reprises dans la suite du texte.

1. Un cube plus un carré plus une racine sont égaux à un nombre

2. Un cube plus un carré plus un nombre sont égaux à une racine

3. Un cube plus une racine plus un nombre sont égaux à un carré

4. Un cube est égal à une racine plus un carré plus un nombre.

Dans la deuxième partie, on a deux degrés égalant deux autres. Elle comporte trois espèces:

1. Un cube plus un carré sont égaux à une racine plus un nombre

2. Un cube plus une racine sont égaux à un carré plus un nombre

3. Un cube plus un nombre sont égaux à une racine plus un carré.

Ce sont là les sept espèces quadrinômes, dont nous ne pouvons analyser aucune sinon géométriquement. L'un de nos prédécesseurs a eu besoin d'une forme particulière de ces espèces, que je mentionnerai. La démonstration de ces espèces ne peut être effectuée que par les propriétés des sections coniques.

Nous allons maintenant présenter successivement chacune de ces vingt-cinq espèces; nous allons les démontrer avec l'Assistance de Dieu: celui qui se confie à lui sincèrement, Dieu le guide et le comble.

Première espèce des binômes : une racine est égale à un nombre. La racine est donc nécessairement connue; ce qui vaut aussi bien pour les nombres que pour les grandeurs mesurables.

Deuxième espèce: un nombre est égal à un carré. Le carré numérique sera donc connu, étant égal au nombre connu; et il n'existe aucune voie pour connaître sa racine numériquement, sinon par induction : en effet celui qui sait que la racine de vingt-cinq est cinq, le sait par induction, et non point par une loi[1] de l'art. On ne doit donc
4v pas avoir égard aux propos/ des hommes de cet art qui sont d'opinion différente.

1. Voir note 1. p. 18.

Parmi les équations polynômes, il y en a qui sont trinômes, d'autres quadrinômes. Les trinômes sont de douze espèces.

Les trois premières sont:

1. Un carré plus une racine sont égaux à un nombre
2. Un carré plus un nombre sont égaux à une racine
3. Une racine plus un nombre sont égaux à un carré.

Ces trois <équations> sont citées dans les livres des algébristes et sont démontrées géométriquement, nullement numériquement.

Les trois suivantes sont:

1. Un cube plus un carré sont égaux à une racine
2. Un cube plus une racine sont égaux à un carré
3. Un cube est égal à une racine plus un carré.

Les algébristes disent que ces trois dernières<équations> sont proportionnelles aux trois premières, chacune à son homologue, c'est-à-dire que "un cube plus une racine sont égaux à un carré" est équivalent à "un carré plus un nombre sont égaux à une racine", et de même pour les deux autres. Mais ils n'en ont pas donné la démonstration lorque les objets des problèmes sont des grandeurs mesurables. Mais si l'objet des problèmes est un nombre, celle-ci est alors évidente d'après l'ouvrage des *Eléments*.

Je démontrerai le cas géométrique.

Les six espèces qui restent des douze, sont:

4r 1. Un cube plus une racine sont égaux/ à un nombre
2. Un cube plus un nombre sont égaux à une racine
3. Un nombre plus une racine sont égaux à un cube
4. Un cube plus un carré sont égaux à un nombre
5. Un cube plus un nombre sont égaux à un carré
6. Un nombre plus un carré sont égaux à un cube.

On n'a rien trouvé dans les livres des algébristes à propos de ces six espèces, si ce n'est ce qu'ils ont dit, de manière fragmentaire, sur une seule d'entre elles. Je le montrerai, j'en donnerai la preuve, géométriquement et non numériquement. La démonstration de ces six espèces ne peut se faire que par les propriétés des sections coniques. Quant aux équations quadrinômes, elles se divisent en deux parties; dans la première, trois degrés sont égalés à un seul. Elle comporte quatre espèces:

Trois de ces six espèces sont citées dans les ouvrages des algébristes. Ils disent: le rapport de la chose au carré est égal au rapport du carré au cube; il s'ensuit donc nécessairement que l'équation entre le carré et le cube est la même que l'équation entre la chose et le carré; et de même le rapport du nombre au carré est égal au rapport de la racine au cube; il s'ensuit également que l'équation entre le nombre et le carré est comme l'équation entre la racine et le cube; mais ils n'ont pas démontré cela géométriquement. Pour le nombre égalant un cube, il n'y a de moyen pour trouver le côté de ce dernier que par induction,[1] lorsque le problème est numérique; mais lorsque le problème est géométrique, il n'est résolu que par les sections coniques.

---

1. Le mot traduit ici par "induction" est الاستقراء, "Istaqrā". Dans le *Lisān*, on peut lire: وقروت البلاد قرواً ، وقريتها ، واقتريتها واستقريتها ، إذا تتبعتها تخرج من أرض إلى أرض " أي تتبعتها أرضاً أرضاً ، ونجد كذلك :

وقروت بني فلان ، واستقريتهم : مررت بهم واحداً واحداً

Ainsi donc, "Istaqrā" les pays, les choses ou les gens, c'est les considérer et les examiner successivement, un à un. C'est cette connotation que l'on retrouve, sans aucune modification sémantique, dans tous les dictionnaires et lexiques, sans exception. Aussi est-ce pour cette raison, sans aucun doute, que les traducteurs arabes des textes grecs ont choisi ce mot pour rendre le terme grec ἐπαγωγή. Un examen systématique de la traduction de l'*Organon* d'Aristote montre que le choix des différents traducteurs s'est porté sur ce mot. Voir *Premiers Analytiques*, 68b 14, 15: "ἅπαντα γὰρ πιστεύομεν ἤ διά συλλογισμοῦ ἤ ἐξ ἐπαγωγῆs", rendu en arabe par

" لأن تصديقنا بالأشياء كلها إما أن يكون بالقياس وإما بالاستقراء " انظر تحقيق عبد الرحمن بدوي : منطق أرسطو القاهرة ١٩٥٢ ج ١ ص ٢٩٤

Voir aussi *Topiques* I, 105 a, 1.12:, "Ἐπαγωγὴ ἡ δέ ἀπο τῶν καθ' ἕκαστον ἐπὶ τά καθόλου ἔφοδοs", que Abū 'Usman al-Dimashquī rend par:

" < وأما > الاستقراء فهو الطريق من الأمور الجزئية إلى الأمر الكلي "

نفس المرجع ص ٤٨٧

L'examen des textes des philosophes arabes, des lexiques philosophiques ensuite comme *Les Définitions* d'al-Jurjânī par exemple, montre l'uniformité de cet usage.

Le seul changement sémantique de ce terme se trouve dans l'analyse diophantienne rationnelle, comme chez al-Karajī et al-Samaw'al. Nous n'envisageons pas ici ce sens qui ne concerne pas al-Khayyâm.

Puisque le cas d'al-Khayyâm est clair, notre souci de rendre ainsi ce terme est motivé non seulement par le respect de la tradition linguistique où se situait al-Khayyâm, mais aussi par l'opposition latente exprimée par ce mot dans le Traité, de l'induction à partir des cas particuliers, à une règle universelle à l'aide du syllogisme ("loi de l'art"), au niveau de la démonstration.

entre les quatre degrés géométriques,[1] je veux dire les nombres absolus, les côtés, les carrés et les cubes, sont trois équations entre les nombres, les côtés et les carrés ; quant à nous, nous allons donner des méthodes par lesquelles on peut déterminer l'inconnue entre ces quatre degrés en dehors desquels, nous l'avons dit, on n'en peut trouver d'autres parmi les grandeurs, je veux dire le nombre, la chose, le carré et le cube.

Ce qu'on peut démontrer par les propriétés du cercle, je veux dire par les deux ouvrages d'Euclide, les *Eléments* et les *Données*, démontrons-le en tâchant de le rendre facile. Et ce qu'on ne peut démontrer que par les propriétés des sections coniques, démontrons-le par les deux livres des *Coniques*.

Mais à la démonstration de ces espèces, si l'objet du problème est un nombre absolu, ni moi, ni aucun des hommes de cet art, ne sommes parvenus (peut-être d'autres, qui nous succèderont, sauront-ils le faire) que pour les trois premiers degrés qui sont le nombre, la chose et le carré. Et peut-être indiquerai-je les démonstrations numériques de ce qu'on peut démontrer à partir de l'ouvrage d'Euclide. Et sache que la démonstration géométrique de ces méthodes ne dispense pas de leur démonstration numérique, si l'objet est un nombre et non pas une grandeur mesurable. Ne vois-tu pas qu'Euclide, après
3v avoir démontré, / dans son cinquième livre, des propositions relatives aux proportions des grandeurs, a ensuite recommencé, dans son septième livre, la démonstration de ces mêmes propositions relatives à la proportion, lorsque leur objet est un nombre.

Les équations entre ces quatre degrés sont ou bien des binômes, ou bien des polynômes.

Il y a six espèces de binômes :

1. un nombre est égal à une racine
2. un nombre est égal à un carré
3. un nombre est égal à un cube
4. des racines sont égales à un carré
5. des carrés sont égaux à un cube
6. des racines sont égales à un cube.

1. Comme immédiatement après, al-Khayyām cite le nombre absolu, le mot "géométrique" ne peut en fait s'appliquer qu'aux autres termes.

Sans doute groupe-t-il les quatre sous le même qualificatif dans la perspective de la solution sur laquelle il s'expliquera plus tard.

On sait, par le livre des *Eléments* d'Euclide, que ces degrés sont tous proportionnels, je veux dire que le rapport de l'unité à la racine est égal au rapport de la racine au carré et est égal au rapport du carré au cube. Le rapport du nombre aux racines est donc égal au rapport des racines aux carrés, égal au rapport des carrés aux cubes, et égal au rapport des cubes aux carrés-carrés, aussi loin que l'on veut.

Il faut bien savoir que ce traité ne sera compris que par ceux qui maîtrisent les ouvrages d'Euclide sur les *Eléments* et sur les *Données*, ainsi que deux livres[1] de l'ouvrage d'Apollonius sur les *Coniques*. Celui à qui la connaissance d'un de ces trois livres fait défaut ne peut avoir accès à la compréhension de ce traité. Je me suis du reste appliqué, avec peine, à ne renvoyer dans ce traité qu'à ces trois livres.

Les solutions en algèbre s'effectuent par l'équation, je veux dire en égalant ces degrés les uns aux autres, comme on le sait bien. Et si l'algébriste emploie le carré-carré dans des problèmes de géométrie, c'est métaphoriquement, et non pas proprement, puisqu'il est impossible que le carré-carré soit au nombre des grandeurs. Ce qui fait
3r partie des grandeurs, c'est/ d'abord une seule dimension, c'est-à-dire la racine, ou, rapporté à son carré, le côté. Puis les deux dimensions, c'est-à-dire la surface; le carré (*māl*) dans les grandeurs est donc la surface carrée. Enfin, les trois dimensions, c'est-à-dire le corps; le cube dans les grandeurs est le solide limité par six carrés.

Or, comme il n'existe aucune autre dimension, ne font partie des grandeurs ni le carré-carré, ni, à plus forte raison, ce qui lui est supérieur. Et si on parle de carré-carré dans les grandeurs, on le dit pour le nombre de leurs parties, quand on les mesure, mais pas pour elles-mêmes en tant que grandeurs mesurables, ce qui est différent. Le carré-carré ne fait donc partie des grandeurs, ni essentiellement, ni par accident;[2] et il n'est pas comme le pair et l'impair qui font partie des grandeurs par accident, en vertu du nombre qui sépare la continuité de celles-ci.

Les équations que l'on trouve dans les livres des algébristes,

---

1. Il s'agit des deux premiers livres.

2. Voir la distinction d'Aristote, *Catégories* 6, 5a, 1.40.

ainsi que te l'indique leur examen attentif; ce qu'on cherche dans cet art, ce sont les accidents attachés à son objet, en tant qu'il est son objet selon la propriété mentionnée; son accomplissement consiste en la connaissance des méthodes mathématiques par lesquelles on
2v peut saisir cette espèce évoquée de détermination des inconnues / numériques ou géométriques.

Par grandeurs, j'entends la quantité continue, dont il y a quatre <espèces> : la ligne, la surface, le corps et le temps, comme on le trouve exposé d'une manière globale dans les *Catégories*, et d'une manière plus détaillée dans la *Philosophie Première.*[1] Certains considèrent que le lieu est une espèce subdivisant la surface sous le genre du continu; mais une connaissance exacte ruine cette opinion. Nous corrigerons donc: le lieu est une surface dans un certain état; sa connaissance exacte ne relève pas du sujet qui nous occupe ici.[2] Il n'est pas d'usage de mentionner le temps au nombre des sujets des problèmes de l'algèbre; mais si on l'avait fait, c'eût été légitime.

Il est de coutume, chez les algébristes, de nommer dans leur art l'inconnue qu'on veut déterminer, "chose", son produit par ellemême "carré" (*māl*), son produit par son carré, "cube", le produit de son carré par son semblable "carré-carré", le produit de son cube par son carré, "carré-cube", le produit de son cube par son semblable, "cubo-cube", et ainsi de suite aussi loin que l'on veut.

Le sens, comme l'indique ensuite le Traité de al-Khayyâm, est que l'inconnue et les données sont mesurables par la même unité (ligne, surface, volume). Ainsi par exemple dans l'équation banale $x = a$, si a est un nombre, on cherche un nombre x tel que $x = a$, si a est une surface, on cherche un segment x tel que $x\ l =$ aire a (l, unité de longueur); la solution a est donc un nombre ou une surface, selon la nature de l'inconnue, nombre ou grandeur géométrique.

1. Voir Aristote, *Catégories* 6; *Physique* 4, ch. 1 à 5; *Métaphysique* Δ, 13, 1. 1020 et sq. Il faut noter que lorsqu'il énumère les espèces de la quantité continue, outre les quatre espèces d'abord citées par al-Khayyām, Aristote y fait aussi figurer le lieu. Ainsi par exemple dans *Catégories* 6, 4b, 1. 23-24:

"Exemples... de quantité continue: la ligne, la surface, le solide, et, en outre, le temps et le lieu". Voir également : Khayyām, *Eclaircissement des difficultés de certains postulats du Livre d'Euclide*, éd. A. Sabra, (Le Caire, 1961), p. 39.

2. Al-Khayyām dit ici que certains considèrent le lieu comme une surface, donc comme une grandeur continue, qui entoure le corps. Rappelons que pour Ibn al-Haytham lu par al-Khayyām, le lieu est "les dimensions d'un corps, abstraites dans l'imagination, donc vide, sans matière, égal à un corps semblable à la figure du corps". Ibn al-Haytham, *Sur le lieu.*

Seigneur Abū Ṭāhir – que Dieu perpétue son Eminence et confonde ceux qui l'envient, ainsi que ses ennemis – j'avais pour alors désespéré de rencontrer un homme possédant aussi parfaitement chaque vertu pratique et théorique: il joint à la pénétration dans les sciences la fermeté dans les actions et dans la recherche du bien pour chacun de ses semblables. Sa rencontre m'a empli le cœur, sa société a rehaussé ma renommée, ma cause a grandi en puisant à ses lumières, et ma force s'est accrue par sa munificence et par ses bienfaits. Il ne me restait donc qu'à suivre la voie sur laquelle je ne manquerais plus ce que les vicissitudes du temps m'ont fait perdre: présenter ce que je connais parfaitement de l'essentiel des notions philosophiques, pour m'approcher de son siège altier.

C'est ainsi que j'ai commencé par énumérer ces espèces de propositions algébriques, car les mathématiques méritent entre toutes les sciences d'être les premières. Et je cherche le refuge du concours divin, espérant qu'il m'aidera à poursuivre, à atteindre avec certitude le terme de ma recherche, et de la recherche de mes prédécesseurs en ces sciences qui sont plus importantes que d'autres; je m'accroche à sa souveraine protection: c'est Lui le Seigneur de l'exaucement; c'est à Lui qu'on se remet en toutes circonstances.

Avec le concours de Dieu et Sa Précieuse Assistance, je dis: l'art de l'algèbre et de l'al-muqābala est un art scientifique dont l'objet est le nombre absolu et les grandeurs mesurables, en tant qu'inconnus mais rapportés à une chose connue par laquelle on peut les déterminer; et cette chose est soit une quantité, soit un rapport, de manière que rien d'autre qu'elle ne leur soit commensurable,[1]

---

1. Etant donné la difficulté du passage, nous avons préféré conserver la traduction littérale. Le pronom "elle" désigne ici d'une manière certaine la chose connue, c'est-à-dire la quantité ou le rapport, comme l'indique la phrase.

Il s'ensuit que le pronom "leur" renvoie au seul pluriel qui précède, c'est-à-dire au nombre absolu et à la grandeur mesurable.

Quant au mot يشاركها, nous l'avons traduit par "commensurable", comme nous l'enseigne l'usage des algébristes (voir la traduction de Diophante, al-Karajī, al-Samaw'al...), et, avant eux, des traducteurs du grec (cf. les termes μετέχω , ἐπικοινῶ , καταμετέχω , σύμμετρος).

Ainsi par exemple dans la phrase d'Euclide, (Livre X - def. 1) : "σύμμετρα μεγέθη λέγεται...", le terme σύμμετρα est traduit en arabe par المشتركة →

Abū Jaᶜfar al-Khāzin[1] qui résolut l'équation par les sections coniques.

A sa suite quelques géomètres eurent besoin de plusieurs espèces de <ces équations>, et certains en résolurent quelques unes; mais aucun d'entre eux n'a rien dit de sûr à propos de l'énumération de leurs espèces, ni du<moyen>d'obtenir les formes de chacune d'elles, ni de leurs démonstrations, si ce n'est relativement à deux espèces, que je mentionnerai.

Quant à moi, j'ai désiré et désire encore ardemment connaître avec certitude toutes leurs espèces, et distinguer, parmi les formes de chacune d'elles, les cas possibles des cas impossibles, par des démonstrations; je sais en effet qu'on en a un besoin très urgent lorsqu'on est aux prises avec les difficultés des problèmes. Je n'ai pu cependant me consacrer exclusivement à l'acquisition de ce bien, ni y penser avec persévérance, détourné que j'en étais par des vicissitudes. Car nous nous trouvons éprouvés par le dépérissement des hommes de science, à l'exception d'un groupe en nombre aussi petit que ses afflictions sont grandes, et dont le souci est de saisir le temps au vol pour se consacrer cependant à l'achèvement et au perfectionnement de la science.

2r Or la plupart/ de ceux qui, par le temps actuel, font les savants, simulent le vrai par le faux, ne dépassent jamais les limites de l'imposture et de l'ostentation savante, et n'emploient la quantité de science qu'ils possèdent qu'à des fins corporelles et viles. Et s'ils rencontrent un homme qui s'efforce de rechercher la vérité et favorise la véracité, ardent à refuser le mensonge et la fausseté, et à repousser l'ostentation et la tromperie, ils le prennent pour un sot et se moquent de lui. C'est de Dieu que nous implorons le secours, et c'est vers lui que nous nous tournons.

Lorsque Dieu Très Haut m'a accordé la grâce de m'attacher à notre très illustre et unique Seigneur, Juge des Juges, l'Imām, le

1. Abū Jaᶜfar al-Khāzin, mathématicien du début du Xème siècle. Voir notamment:

ابن النديم : الفهرست ، الطبعة المذكورة ص ٣٤١

القفطي : تاريخ الحكماء ، الطبعة المذكورة ص ٢٩٦ .

Voir également A. Anbouba, "L'Algèbre arabe aux IXème et Xème siècles: Aperçu général", *Journal for the History of Arabic Science*, 2(1978), 98-100, et R. Rashed, "L'Analyse diophantienne au Xème siècle: l'exemple d'al-Khāzin", *Revue d'Histoire des Sciences*, 32, (1979), 199.

Traité du Sage unique Abū al-Fatḥ ᶜUmar b. Ibrāhīm al-Khayyāmī en Algèbre et en al-Muqābala.

<Introduction>[1]

1v / Une des notions[2] mathématiques dont on a besoin dans la partie du savoir connue sous le nom de mathématique est l'art de l'algèbre et de l'al-muqābala, destiné à déterminer les inconnues numériques et géométriques. Il contient des espèces <de problèmes> dans lesquels on a besoin d'espèces de propositions préalables très difficiles, et dont la solution a été impossible à la plupart de ceux qui les ont examinées. Quant aux Anciens, il ne nous est rien parvenu de ce qu'ils en ont dit; peut-être, après les avoir recherchés et examinés, ne les ont-ils pas saisis; peut-être leur recherche ne les a-t-elle pas obligés à les examiner; peut-être enfin rien de ce qu'ils en ont dit n'a-t-il été traduit dans notre langue. Quant aux Modernes, c'est al-Māhānī[3] qui parmi eux fut amené à analyser par l'algèbre le lemme qu'Archimède a utilisé, le considérant comme admis, dans la proposition 4 du 2ème livre de son ouvrage sur *La sphère et le cylindre*; or il est parvenu à des cubes, des carrés et des nombres formant une équation qu'il ne réussit pas à résoudre après y avoir longtemps réfléchi; il trancha donc en jugeant que c'était impossible, jusqu'à ce que parût

---

1. < . . . > signifie ajouté par nous ; alors que nous proposons d'éliminer ce qui se trouve entre [. . .].

2. On a traduit le mot معنى par "notion"; on sait par ailleurs que ce mot, d'origine non coranique, a rendu dans la plupart des cas le grec νόημα , et a été traduit en latin par "intentio". Cette traduction convient ici, car al-Khayyām entend insister sur la notion d'algèbre et d'al-muqābala.

3. Abu ᶜAbdallāh Muḥammed b. ᶜIsā Aḥmed al-Māhānī. Il a vécu entre 825 et 888, environ. Sur sa biographie et son oeuvre, voir notamment:

ابن النديم : الفهرست ، طبعة طهران ١٩٧١ ، ص ٣٣١ ، تحقيق رضا ــ تجدد .

جمال الدين بن يوسف القفطي: تاريخ الحكماء ، طبعة ليبتزج ١٩٠٣، ص ٦٤ ، تحقيق ليبرت .

F. Sezgin: *Geschichte des arabischen Schriftums*. B. V. pp. 260-262. (Leiden, 1974).

TRADUCTION FRANÇAISE

d'autre part, il n'a été réalisé qu'à partir de deux manuscrits, ceux de Leiden et de Paris, ainsi que d'un fragment, de Paris. Nous avons donc pensé qu'il est temps de reprendre l'édition à partir de tous les manuscrits à présent disponibles, d'autant plus que le manuscrit de Leiden, base essentielle de l'édition de Woepcke, s'avère être une copie du XVIIème siècle d'un manuscrit actuellement à la bibliothèque de l'Université Colombia, ainsi que nous l'avons montré.

A cette édition il s'imposait de joindre une nouvelle traduction, aussi bien pour corriger certains contre-sens commis par les traducteurs précédents, que pour tenir compte des variantes de la nouvelle édition. Nous avons voulu que cette traduction fût aussi littérale que possible, même si parfois l'élégance en pâtit, et qu'elle restituât aux concepts fondamentaux le sens qu'ils avaient dans la langue du Xème siècle, même si le terme choisi ne nous est plus familier. Pour les figures, nous n'avons pas obéi à de telles règles; elles sont le fait des copistes, et il aurait été inutile d'en alourdir le texte. Nous donnons principalement l'analyse mathématique du texte, réservant à un deuxième volume (actuellement en préparation) l'analyse historique, qui, pour être complète, devra aussi comporter l'édition de plusieurs textes des prédécesseurs d'al-Khayyām.

Si ce travail a pu voir le jour dans un temps raisonnable, c'est grâce à l'Institut d'Histoire de la science arabe de l'Université d'Alep, et à la pression amicale et efficace de son Directeur, M. A. Y. al-Hassan, que je tiens à remercier personnellement ici. Je remercie vivement le Professeur E. S. Kennedy, ainsi que M. T. Debarnot, et R. Morelon, pour avoir bien voulu superviser l'impression de cet ouvrage.

Paris, 1979

Roshdi Rashed

l'*Opuscule* laisse supposer qu'il fut rédigé après celui-ci, et avant le *Traité*. Selon les indications fournies par l'auteur, il s'agit d'un mémoire dans lequel al-Khayyām établit la formule du développement binômial et le tableau des coefficients. Mais comme d'une part al-Khayyām affirme avoir démontré dans ce mémoire ce que personne n'a pu faire avant lui; comme par ailleurs on sait, par al-Samaw'al, qu'al-Karajī possédait déjà, à la fin du Xème siècle, cette formule et ce tableau, tout laisse penser que le mémoire d'al-Khayyām contenait davantage que ces deux résultats. Peut-être s'agissait-il de l'extraction de la racine *néme* d'un entier, ainsi qu'on la trouve exposée par al-Samaw'al dans son livre de 1172. Mais on sait d'autre part qu'al-Bīrūnī a composé avant al-Khayyām un ouvrage de 100 pages in folio sur ce sujet. On peut donc, dans ces conditions, avancer l'hypothèse que l'ouvrage d'al-Khayyām était consacré à une méthode de résolution numérique des équations algébriques, telle qu'on la trouvera plus tard dans le Traité de Sharaf al-Dīn al-Ṭūsī, peut-être sous une autre forme. Mais aucune affirmation n'est encore possible.

Etant donné l'importance de l'oeuvre algébrique d'al-Khayyām, unanimement reconnue par les historiens des mathématiques depuis Montucla, au moins, il paraissait nécessaire de la rendre disponible à ceux qui s'intéressent à l'histoire de l'algèbre. Nous présentons donc une édition, aussi scientifique que possible, des deux principaux textes qui nous sont parvenus, accompagnée d'une traduction française à l'intention des historiens qui ne peuvent suivre aisément le texte arabe.

L'édition de l'*Opuscule* a été faite à partir du seul manuscrit connu; ce texte n'a, jusqu'à présent, fait l'objet d'aucune édition, si ce n'est une transcription du manuscrit par M. G. H. Mossaheb.

Quant au *Traité*, il a déjà été édité et traduit en français par F. Woepcke. Ce travail a ensuite été reproduit tel quel par M. Mossaheb, et la traduction française a servi de base à la traduction anglaise de D. S. Kasir. Une deuxième traduction anglaise, de H. J. J. Winter et W. ᶜArafat, a profité du manuscrit d'India Office. Il existe enfin une traduction russe, que nous n'avons pu consulter faute de connaître la langue.

Il est donc clair que c'est sur l'édition de Woepcke que se fondent les études consacrées à al-Khayyām. Mais ce travail de qualité, ainsi que beaucoup d'autres du même auteur, n'est plus disponible;

parvenu des mathématiciens alexandrins au sujet de l'équation cubique; si ses prédécesseurs arabes ont traité certaines formes particulières de cette équation, aucun n'a cependant posé le problème général. Mais penser ce qui jusqu'alors était demeuré impensé, c'est concevoir d'une manière absolument nouvelle les rapports entre l'algèbre et la géométrie, pour être ainsi en mesure d'élaborer ce que les historiens ont appelé une théorie géométrique des équations de degré $\leqslant 3$.

Le concept fondamental, sur lequel insiste al-Khayyām, est celui d'unité de mesure qui, convenablement défini en rapport avec celui de dimension, permet l'*application* de la géométrie à l'algèbre, et ainsi l'élaboration de la dite théorie. Or, si l'ensemble du projet a été suscité, en un certain sens, par l'obstacle que constituait encore la résolution par radicaux de l'équation cubique, il renvoie aussi à ses propres conditions de possibilité:

– la formulation du concept de polynôme et le développement de l'algèbre des polynômes par al-Karajī et ses successeurs.

– les études par les géomètres arabes, al-Qūhī, Ibn al-Haytham parmi bien d'autres, des problèmes classiques: trisection de l'angle, construction de l'heptagone régulier etc. C'est en effet au cours de ces études que surgit l'hypothèse, ensuite explicitée par al-Khayyām, qu'un problème solide n'est pas généralement constructible à l'aide de la règle et du compas. C'est également l'étude de ces problèmes qui amena les mathématiciens à recourir aux courbes coniques, et à procéder par leurs intersections; leurs méthodes et leurs résultats furent d'une importance primordiale dans l'élaboration de l'oeuvre d'al-Khayyām.

– les travaux de mathématiciens comme Abū al-Jūd et al-Bīrūnī, par exemple, dont quelques-uns sont cités par al-Khayyām lui-même, qui ont traduit algébriquement certains problèmes solides et ont ensuite tenté de les résoudre, soit par les courbes coniques, soit, comme al-Bīrūnī, par approximation.

Mais si l'on veut examiner les poids respectifs de ces divers éléments dans la constitution de la théorie d'al-Khayyām, il faut réécrire l'histoire de ce chapitre de l'algèbre. Une telle entreprise n'a pas sa place ici, mais fera l'objet d'une autre étude.

Le troisième mémoire, encore introuvable, est cité par al-Khayyām dans son *Traité*. L'absence de toute référence à cet écrit dans

PRÉFACE

Si l'on ne connaît pas de manière certaine les dates d'al-Khayyām, on n'est pas moins démuni lorsqu'il s'agit de relater les évènements de sa vie. Les anciens historiens en effet romancèrent souvent la biographie de ce grand mathématicien, qui fut aussi un grand poète, si bien qu'il est malaisé de faire la part de ce qui, dans leurs narrations, relève de la légende. Et de fait, al-Khayyām apparaît, selon les sources, tour à tour sceptique et croyant, mystique et philosophe rationaliste, pieux musulman et libertin et, enfin, contre les évidences, membre de la célèbre secte des Assassins. Seule une hypothèse plausible résiste à la confrontation prudente des témoignages : né vers le milieu du XIème siècle (1048 environ) à Niyashabour, il y mourut en 1131 environ.

La situation est, heureusement, tout autre pour son oeuvre : ses poèmes, écrits en persan, ses travaux philosophiques, en arabe pour la plupart, ses mémoires scientifiques enfin, écrits en arabe, nous sont bien connus. Pour ne citer que ce qui nous intéresse ici, les travaux algébriques, on sait qu'al-Khayyām a composé trois mémoires dont deux seulement nous sont parvenus. Même si l'on ignore la date de leur rédaction, on connaît avec une quasi-certitude l'ordre suivant lequel ils ont été écrits. [1]

Le premier est un *Opuscule* sur la division du quart de cercle ; cet écrit ne vaut pas seulement pour le problème particulier qui y est traité – construction géométrique non résoluble par la règle et le compas –, mais aussi pour les rapports que l'auteur essaie intentionnellement d'y établir entre l'algèbre et la géométrie, et pour les digressions qu'il y fait. L'ouvrage comporte en effet un exposé de l'histoire de l'équation cubique, et un prolégomène à une nouvelle – la première – théorie des équations de degré $\leqslant 3$.

Le deuxième mémoire d'al-Khayyām est son célèbre *Traité* d'algèbre. Il s'agit là en fait de la réalisation du projet exposé dans l'*Opuscule*, et de la rédaction de ce qui n'y est qu'esquissé. Al-Khayyām reprend alors son exposé historique et soutient que rien n'est

---

1. Voir l'Introduction arabe de cet ouvrage.

TABLE DES MATIERES

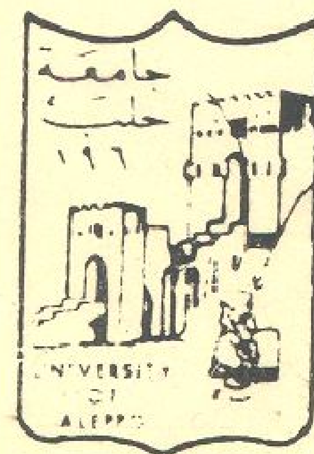
L'OEUVRE ALGÉBRIQUE D'AL-KHAYYĀM

établie, traduite et analysée

par

Roshdi RASHED et **Ahmed DJEBBAR**

Sources and Studies in the History
of Arabic Mathematics 3



L'Oeuvre Algébrique d'al-Khayyām

établie, traduite et analysée

par

Roshdi Rashed et **Ahmad Djebbar**

University of Aleppo

I. H. A. S.

1981